

С.Б. Ахажанов^{1*}, Е.Б. Утепов², Т.Б. Ахажанов²

¹ Е.А. Бөкетов Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

² Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

Авторлар жайлы ақпарат:

Ахажанов Сунгат Беркинович – PhD, қауымдастырылған профессор, Бөкетов атындағы Қарағанды университеті, Қарағанды, Қазақстан

<https://orcid.org/0000-0002-0903-3517>, email: stjg@mail.ru

Утепов Елбек Бахитович – PhD, қауымдастырылған профессор, профессор м.а., Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

<https://orcid.org/0000-0001-6723-175X>, email: utepov-elbek@mail.ru

Ахажанов Талгат Беркинович – PhD, қауымдастырылған профессор, Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана, Қазақстан

<https://orcid.org/0000-0003-3346-4947>, email: talgat_a2008@mail.ru

*Автор корреспондент: email: stjg@mail.ru

КӨЛДЕНЕҢ ЫҒЫСУ ДЕФОРМАЦИЯСЫН ЕСКЕРГЕНДЕГІ АРҚАЛЫҚТЫҢ ЖАЗЫҚ ИЛУІН ЗЕРТТЕУ

Андатпа. Мақалада көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың жетілдірілген ақырлы элементі ұсынылған. Көлденең ығысу деформациясы ақырлы элементтің түйіндеріндегі сызықтық жылжулар арқылы параметр түрінде ескерілген. Ақырлы элементтер әдісі бойынша көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың ақырлы элементінің негізгі тәуелділігі мен қатаңдық матрицасы табылған. Есептеу нәтижелері аналитикалық және сандық әдістермен салыстырылған.

Түйін сөздер: арқалықтың ақырлы элементі, көлденең ығысу деформациясы, қатаңдық матрица, көлденең ығысу параметрі, тік жылжу.

Кіріспе

Қазіргі уақытта композиттік материалдар саласының дамуы құрылыста, кеме жасауда және ұшақ жасауда көп қабатты конструкцияларды кеңінен қолдануға мүмкіндік береді. Олар негізінен төменгі ығысу қатаңдығымен ерекшеленеді, ал геометриялық сипаттамаларды ескеретін параметрдің әсері ығысу модулі аз болатын материалдардан жасалған конструкцияларды есептеулерде айқын көрінеді. Сондықтан, көлденең ығысу деформациясын енгізе отырып, өзектік конструкциялар мен олардың элементтерін есептеудің классикалық алгоритмдерін нақтылау қажеттілігі туындайды. Конструкциялар мен олардың элементтерінің статикасы мен динамикасының қолданбалы есептерін шешу кезінде С.П. Тимошенко мен С.А. Амбарцумян теориялары қолданылады. Осы теориялар бойынша ығысудан тәуелді майысу функциясын енгізу арқылы көлденең ығысу деформациялары ескеріледі. Бұл негізгі теңдеулерді ең қарапайым жағдайға әкеледі және арқалықтың қимасының биіктігі бойынша жанама жылжулардың таралуының нақты геометриялық түрін көрсетеді. Алайда, егер ығысу модулі жоғары материалдардан жасалған арқалықтар үшін осы әдістерді қолданып, есептеулер жүргізгендегі майысудың мәндері айтарлықтай айырма-

шылықтарға әкелмесе, онда қатандығы төмен материалдар кезіндегі ығысудың айырмашылығы айтарлықтай болады, өйткені көрсетілген гипотезалар [1] бойынша анықталған көлденең ығысу деформацияларынан қосымша майысулар пайда болады.

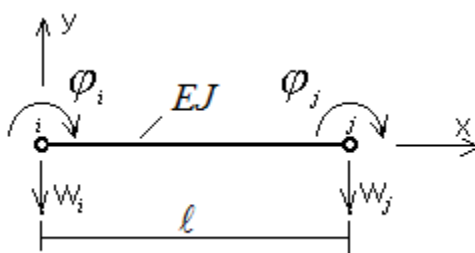
Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтардың жазық иілу мәселелері бірқатар жұмыстарда қарастырылады [2-5]. Оның ішінде мәселенің сандық шешімдерін алу үшін ақырлы элементтер әдісін жиі пайдаланады. Wilson [6] тікбұрышты изопараметрлік ақырлы элементтерге үйлеспейтін жылжуларды енгізді. Кейбір зерттеушілер бұл әдісті үлкен сенімсіздікпен қабылдады. Дегенмен, тікбұрышты элементтер үшін жылжулар мен кернеулер бойынша нәтижелер Zienkiewicz [7] және Bathe [8] сияқты басқа зерттеушілердің тоғыз түйінді изопараметрлік элементке арналған нәтижелеріне өте жақын болды. Strang [9] профессор Wilson ұсынған әдісті талдай келе жылжулардың үйлесімділігі сақталмағандығын және әдіс тікбұрышты емес элементтерді қолданатын мысалдармен тексерілмегендігін көрсетті. 2002 жылы Wilson [10] үйлесімділік шарттарын қамтамасыз ету мақсатында интерполяциялық функцияларды көрсету үшін кубтық көпмүшені пайдаланды және бұл SAP-2000, ETABS және SAFE сияқты танымал құрылымдарды есептеу кезінде бағдарламалық кешендерге қолданылды.

Vu Thanh Thuu көлденең ығысу деформациясының әсерін ескере отырып, иілетін арқалықтың ішкі күші мен жылжуларын зерттеу кезінде арқалықтың иілу мәселесін әзірлеу және шешу үшін жылжу мен ығысу күші функцияларын екі тәуелсіз белгісіз функциялар түрінде пайдалануды ұсынды [11]. Vu Thanh Thuu жасырын жылжулар және көлденең күштер функцияларын білдіретін полиномның параметрлерін оңтайландыру арқылы Гаусс принципі әдісін (профессор На Нгуу Суонг [12] ұсынған) пайдалана отырып, кейбір арқалықтардың иілу мәселелерін аналитикалық түрде анықтады. Do Thang [13] көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың нақтыланған теориясын алу үшін теориялық қиындықтардан құтылуға мүмкіндік беретін ақырлы элементтер әдісін қолданды.

Бұл мақалада ақырлы элементтер әдісін қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың жазық иілуінің нақтыланған жетілдірілген есептеу теориясы ұсынылды.

Материалдар мен әдістер

Біртекті материалдан жасалған арқалықтық конструкциядан ақырлы элементті бөліп алып жеке қарастырайық (1-сурет).



1-сурет – Ақырлы элемент

Егер арқалықтың материалы композит болып табылса, онда көлденең ығысу деформациясын ескерген жөн. Оны ескеру үшін негізгі тәуелділікті скаляр түрінде жазамыз:

$$F_m = K_{m1}W_i + K_{m2}\varphi_i + K_{m3}W_j + K_{m4}\varphi_j, \quad m = 1,2,3,4 \quad (1)$$

Ақырлы элементтің кез келген қимасындағы көлденең күш Q қима әдісі және негізгі тәуелділік бойынша былайша анықталады:

$$Q = -F_i = F_j = -\frac{EJ}{\ell^2} \left[\frac{12}{\ell} W_i + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell} W_j + 6\varphi_j \right], \quad (2)$$

мұнда EJ, ℓ – арқалықтың ақырлы элементінің иілу қатандығы және ұзындығы.

Осы (2) көлденең күшті басқаша түрде былайша табуға болады:

$$\tilde{Q} = -GA \cdot \beta, \quad (3)$$

мұнда GA, β – көлденең ығысудағы қатандық пен бұрыш.

Осы (2) және (3) екі көлденең күш өрнектерін бір-бірімен теңестіріп, көлденең ығысу бұрышын иілу кезіндегі жылжулармен анықтаймыз:

$$\tilde{Q} = Q: \beta = g \left[\frac{12}{\ell} W_i + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell} W_j + 6\varphi_j \right], \quad g = \frac{EJ}{GA \cdot \ell^2}, \quad (4)$$

мұнда g – көлденең ығысу параметрі.

Енді көлденең ығысу деформациясын сызықтық жылжулар арқылы ескеру үшін ығысудағы ақырлы элементтің майысу функциясын енгіземіз:

$$\tilde{W}(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) \tilde{W}_i + \frac{x}{\ell} \tilde{W}_j, \quad (5)$$

мұнда \tilde{W}_i, \tilde{W}_j – түйіндердегі ығысулық майысулар.

Көлденең ығысу бұрышын табамыз:

$$\beta = \frac{d\tilde{W}(x)}{dx} = \frac{1}{\ell} \left(\tilde{W}_j - \tilde{W}_i \right) \quad (6)$$

Түйіндердегі жаңа сызықтық жылжуларды енгіземіз:

$$W_i^0 = W_i + \tilde{W}_i, \quad W_j^0 = W_j + \tilde{W}_j \quad (7)$$

(4) формуланы былайша жазамыз:

$$\beta = \frac{1}{\ell} \left(\tilde{W}_j - \tilde{W}_i \right) = -\beta_0 \left[\frac{12}{\ell} W_i^0 + 6\varphi_i - \frac{12}{\ell} W_j^0 + 6\varphi_j \right], \quad \beta_0 = \frac{g}{1+12g} \quad (8)$$

Қосымша шарт ретінде ақырлы элементтің ортаңғы нүктесінде майысудың болмауын көрсетуге болады:

$$\tilde{W}_c = \frac{1}{2}(\tilde{W}_i + \tilde{W}_j) = 0 \quad (9)$$

(9) теңдіктен $\tilde{W}_j = -\tilde{W}_i$ болғандықтан, (8) формуладан ығысулық майысуды аламыз.

$$\tilde{W}_i = \frac{\beta_0}{2} [12W_i^0 + 6\ell\varphi_i - 12W_j^0 + 6\ell\varphi_j] \quad (10)$$

(7) және (10) ескеріп, негізгі тәуелділік (1) келесі түрде жазылады ($m = 1, 2, 3, 4$):

$$\begin{aligned} F_m &= K_{m1}W_i^0 + K_{m2}\varphi_i + K_{m3}W_j^0 + K_{m4}\varphi_j + (K_{m3} - K_{m1})\tilde{W}_i = \\ &= K_{m1}^0W_i^0 + K_{m2}^0\varphi_i + K_{m3}^0W_j^0 + K_{m4}^0\varphi_j, \end{aligned} \quad (11)$$

мұнда көлденең ығысуды ескергендегі ақырлы элементтің қатаңдық матрицасының элементтері:

$$\begin{aligned} K_{m1}^0 &= K_{m1} + 6\beta_0(K_{m3} - K_{m1}), & K_{m2}^0 &= K_{m2} + 3\beta_0\ell(K_{m3} - K_{m1}), \\ K_{m3}^0 &= K_{m3} - 6\beta_0(K_{m3} - K_{m1}), & K_{m4}^0 &= K_{m4} + 3\beta_0\ell(K_{m3} - K_{m1}) \end{aligned} \quad (12)$$

Ақырлы элементтің көлденең ығысу ескерілгендегі негізгі тәуелділігі мына түрде болады:

$$\bar{R} = S \cdot \bar{z}, \quad \bar{R}^T = |F_i \ M_i \ F_j \ M_j|, \quad \bar{z}^T = |W_i \ \varphi_i^0 \ W_j \ \varphi_j^0| \quad (13)$$

Осы ақырлы элементтің көлденең ығысуды ескергендегі қатаңдық матрицасы болады:

$$\begin{aligned} S &= \frac{EJ}{\ell^3} \begin{bmatrix} 12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell & -12\alpha_0 & 6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0 + 1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0 - 1)\ell^2 \\ -12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell & 12\alpha_0 & -6\alpha_0\ell \\ 6\alpha_0\ell & (3\alpha_0 - 1)\ell^2 & -6\alpha_0\ell & (3\alpha_0 + 1)\ell^2 \end{bmatrix} \\ \alpha_0 &= 1 - 12\beta_0 = \frac{1}{1 + 12g} \end{aligned} \quad (14)$$

Егер көлденең ығысу ескерілмесе $g = 0$, онда $\alpha = 0$, $\alpha_0 = 0$, сондықтан $S = K$ болады.

Көлденең ығысу параметрі (4) жалпы жағдайда мына өрнек арқылы анықталады:

$$g = \frac{EJ}{\mu GA \ell^2}, \quad (15)$$

мұнда $\mu = 1$ - жанамалық кернеу көлденең қимада тұрақты болғанда, $\mu = \frac{5}{6}$ - жанамалық кернеу көлденең қимада парабола заңымен өзгергенде қолданылады.

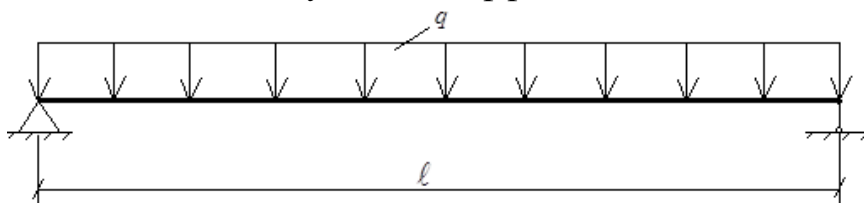
Сонымен (12) қатаңдық матрицасының элементтерін ашып жазатын болсақ, (14) түрдегі ақырлы элементтің көлденең ығысу деформациясын ескергендегі қатаңдық матрицасын алуға болады.

Көлденең ығысу деформациясын сызықтық жылжулар арқылы ескергендегі ақырлы элементтің негізгі тәуелділігі (13) формасы бойынша (1) формулаға сәйкес келеді. Арқалықтың ақырлы элементінің негізгі тәуелділігі (1) материалы изотропты қатты арқалықтар үшін қолданылады. Егер арқалықтар композиттік материалдан жасалса, онда иілгіш болып табылады. Бұл жағдайда, β_0 параметрі көмегімен көлденең ығысу деформациясы ескерілген негізгі тәуелділікті (11) пайдаланған дұрыс.

Нәтижелер және талқылау

Жоғарыда алынған нәтижелерді қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың иілуін анықтау үшін төмендегі мысалдарды қарастырайық.

1-мысал. Бізге екі шеті топсалы түрде тірелген қарапайым арқалық берілсін (2-сур.). Арқалыққа таралған жүктемесі $q = 10 \frac{\text{кН}}{\text{м}}$ әсер етсін. Арқалықтың ұзындығы $\ell = 10 \text{ м}$, биіктігі $h = 2,5 \text{ м}$, ені $b = 0,5 \text{ м}$ ал материалының серпімділік модулі $E = 30000 \text{ кПа}$ болсын. Пуассон коэффициенті $\nu = 0,25$.



2-сурет – Бір қалыпты таралған жүктеме әсеріндегі арқалық

Бұл мысалда көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың деформациялық күйін анықтау қажет. Ол үшін арқалықты ұзындығы $\Delta \ell = 1 \text{ м}$ он элементтерге бөліп, түйіндері мен жылжуларын белгілейміз.

Арқалықтың көлденең қимасы тіктөртбұрыш болса, көлденең ығысу параметрі (4) бойынша анықталады.

$$g = \frac{5}{24} \left(\frac{h}{\ell} \right)^2$$

Осы арқалықтың көлденең ығысу деформациясын ескергендегі деформациялық күйін зерттеп, нәтижесін алу үшін ақырлы элементтер әдісін қолданып бағдарлама құрылды. Бағдарламаның нәтижелері кестелер мен эпюра (3-сурет) түрінде көрсетілді.

1-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0$)

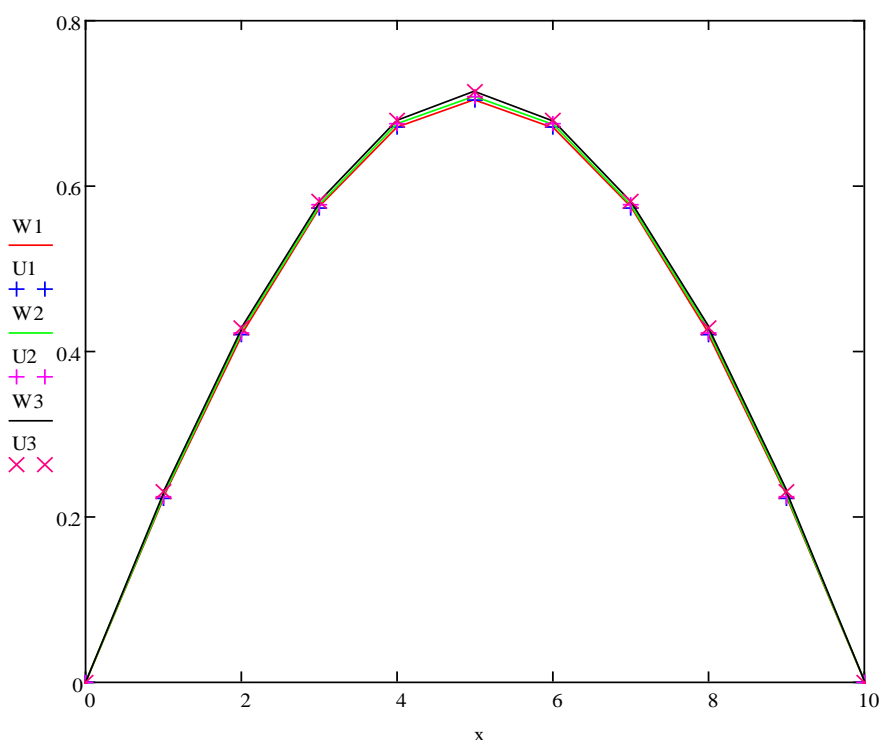
| l | 0 | 2 | 5 | 8 | 10 |
|-----|---|--------|--------|--------|----|
| W1 | 0 | 0,4208 | 0,7049 | 0,4208 | 0 |
| U1 | 0 | 0,4201 | 0,7046 | 0,4201 | 0 |

2-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0,01302$)

| l | 0 | 2 | 5 | 8 | 10 |
|-----|---|--------|--------|--------|----|
| W2 | 0 | 0,4235 | 0,7088 | 0,4235 | 0 |
| U2 | 0 | 0,4230 | 0,7084 | 0,4230 | 0 |

3-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0,05208$)

| l | 0 | 2 | 5 | 8 | 10 |
|-----|---|--------|--------|--------|----|
| W3 | 0 | 0,4292 | 0,7143 | 0,4292 | 0 |
| U3 | 0 | 0,4288 | 0,7136 | 0,4288 | 0 |

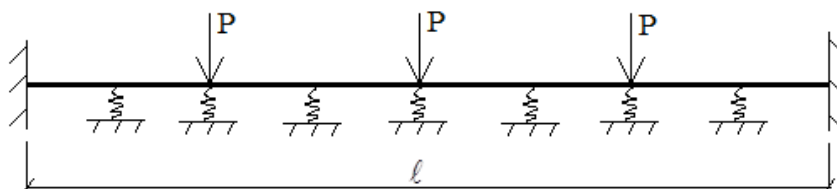


$g=0$ (W1,U1); $g=0,01302$ (W2,U2); $g=0,05208$ (W3,U3)

3-сурет – Таралған жүктеме әсеріндегі топсалы тірелген арқалықтың тік жылжуының эпюралары

Мұнда $W1$, $W2$, $W3$ – ұсынылған әдіс бойынша алынған тік жылжудың мәндері, $U1$, $U2$, $U3$ – аналитикалық әдіс бойынша алынған нәтижелер.

2-мысал. Екі шеті қатты бекітілген, ортаңғы жақтары серпімді тірелген арқалықты қарастырайық (4-сур.). Арқалыққа мәні $P=20\text{кН}$ тең үш шоғырланған күштер әсер етсін. Арқалықтың ұзындығы $l=4\text{ м}$, биіктігі $h=1\text{ м}$, ені $b=0,5\text{ м}$ ал материалының серпімділік модулі $E=40000\text{ кПа}$ болсын. Пуассон коэффициенті $\nu=0,25$.



4-сурет – Екі шеті қатты бекітілген, ортаңғы жақтары серпімді тірелген арқалық

Есептеу алгоритмі алдыңғы мысал бойынша жасалады. Берілген арқалықтың ұзындығы $\Delta l = 0,5 \text{ м}$ сегіз элементтерге бөлініп, түйіндері мен жылжулары белгіленеді. Бұл мысалдың нәтижелері 4–6 кестелер мен 5-суретте көрсетілген.

4-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0$)

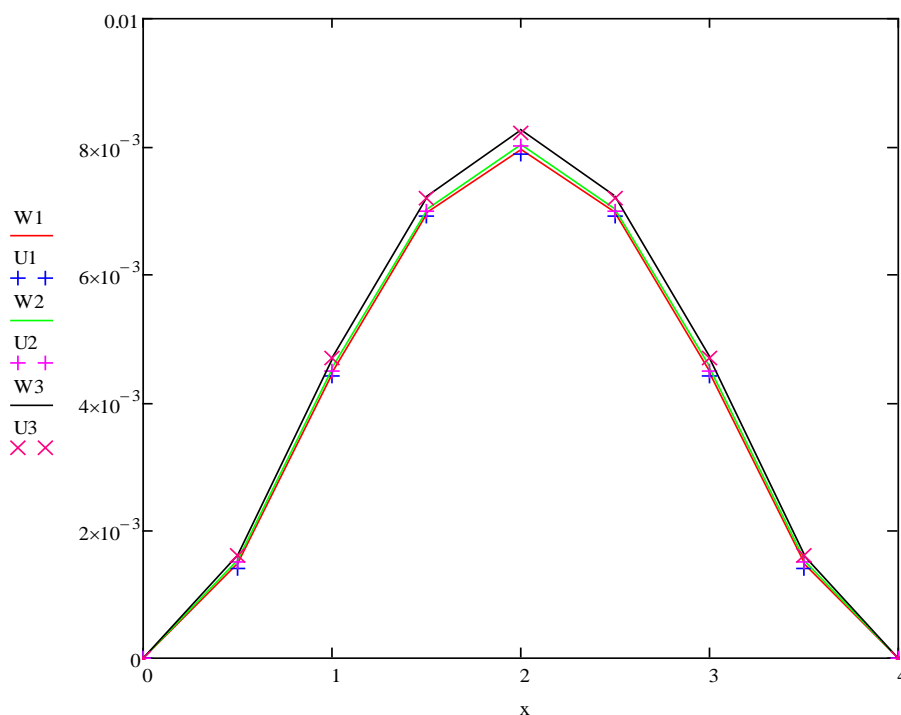
| | | | | | | | | | |
|-----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| l | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| W1 | 0 | 0,0015 | 0,0045 | 0,0070 | 0,0080 | 0,0070 | 0,0045 | 0,0015 | 0 |
| U1 | 0 | 0,0014 | 0,0044 | 0,0069 | 0,0079 | 0,0069 | 0,0044 | 0,0014 | 0 |

5-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0,01302$)

| | | | | | | | | | |
|-----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| l | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| W2 | 0 | 0,0017 | 0,0047 | 0,0072 | 0,0082 | 0,0072 | 0,0047 | 0,0017 | 0 |
| U2 | 0 | 0,0016 | 0,0046 | 0,0071 | 0,0081 | 0,0071 | 0,0046 | 0,0016 | 0 |

6-кесте – Тік жылжулардың мәндері (көлденең ығысу параметрі $g=0,05208$)

| | | | | | | | | | |
|-----|---|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| l | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| W3 | 0 | 0,0019 | 0,0049 | 0,0074 | 0,0084 | 0,0074 | 0,0049 | 0,0019 | 0 |
| U3 | 0 | 0,0018 | 0,0048 | 0,0073 | 0,0083 | 0,0073 | 0,0048 | 0,0018 | 0 |



$g=0$ (W1,U1); $g=0,01302$ (W2,U2); $g=0,05208$ (W3,U3)

5-сурет – Шоғырланған күш әсеріндегі қатты бекітілген арқалықтың тік жылжуының эпюралары

Мұнда W_1, W_2, W_3 – ұсынылған әдіс бойынша алынған тік жылжудың мәндері, U_1, U_2, U_3 – [13] әдіс бойынша алынған нәтижелер.

Қорытынды

Ұсынылып отырған жұмыста ақырлы элементтер әдісін қолданып, көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтың жетілдірілген есептеу теориясы алынды. Классикалық теорияда қарастырылмайтын көлденең ығысу деформациясы, ақырлы элементтің түйіндеріндегі бұрыштық және сызықтық жылжулар арқылы еркіндік дәрежесін көтермей ақ ескеруге болады. Көлденең ығысу деформациясын ескергендегі иілген арқалықтың ақырлы элементі және қатандық матрицасы табылды. Шешуші теңдеулер жүйесі толығымен автоматтандырылды.

Есептеу нәтижелері кестелер және эпюралар түрінде көрсетіліп, аналитикалық және сандық әдістермен салыстырылды. Қарастырылған мысалдардан ақырлы элементтер әдісімен арқалықтың көлденең ығысу деформациясын ескергенде, тік жылжу мәндері ұлғаятынын көруге болады. Көлденең ығысу деформациясы арқалықтың ішкі күштеріне әсері болмайды, яғни иілу моменті мен көлденең күштерінің мәні өзгеріссіз қалады.

Алынған нәтижелер көлденең ығысу деформациясын ескергендегі арқалықтық конструкциялардың кез келген нүктесінде пайда болатын жылжулар мен кернеулерді анықтауға мүмкіндік береді.

Әдебиеттер:

1. Каган-Розенцвейг Л.М. *Техническая теория касательных напряжений в изгибаемом стержне*. Вестник гражданских инженеров. 2017, 3(62), 40–49.
2. Синельщиков А.В., Панасенко Н.Н. *Математическая модель жестких характеристик тонкостенных стержней замкнутого профиля корабельных конструкций*. Вестник АГТУ. Серия: Морская техника и технология. 2016, 2, 41-52.
3. Харлаб В.Д. *К технической теории касательных напряжений при плоском изгибе балок*. Вестник гражданских инженеров. 2016, 1(54), 82–88.
4. Харлаб В.Д. *Развитие элементарной теории касательных напряжений при плоском изгибе балок*. Вестник гражданских инженеров. 2015, 1(48), 82–87.
5. Timoshenko S.P. *History of strength of materials*. New York, 1953, 452.
6. Wilson E.L, Taylo R.L, Doherty W., Ghaboussi J. *Incompatible Displacement Models. Conference proceedings, «ONR Symposium on Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics»*: - University of Illinois, Urbana, 1971.
7. Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Zhu J.Z. *The finite element method: Its basis and fundamentals*. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005.
8. Bathe K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, NJ., 1996, 1038.
9. Strang G. *Variational Crimes in the Finite Element Method*, in *The Mathematical Foundations of the Finite Element Method*. Academic Press. 1972, 689-710.
10. Wilson E.L. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures*. California, USA, 2002.
11. Thuy V.T. *Research on internal force and displacement of frame system when considering the effect of shear strain*. Doctoral thesis, Hanoi Architectural University, 2010.

12. Cuong H.H. *The extreme Gauss's principle method. Journal of Science and Technology. 2005, 4, 112-118.*
13. Do Thang. *An improved method of calculating beam deformation considering transverse shear strain. International Journal of GEOMATE. 2021, 21(83), 109-116.*

References:

1. Kagan-Rozentsveyg L.M. *Tekhnicheskaya teoriya kasatelnyih napryazheniy v izgibaemom sterzhne [Technical theory of shear stresses in a bending rod] Vestnik grazhdanskih inzhenerov = Bulletin of Civil Engineers. 2017, 3(62), 40–49. (in Russ.)*
2. Sinelschikov A.V., Panasenko N.N. *Matematicheskaya model zhestkostnyih harakteristik tonkostennyih sterzhney zamknutogo profilya korabelnyih konstruksiy [Mathematical model of rigidity characteristics of thin-walled closed profile bars of ship structures] Vestnik AGTU. Seriya: Morskaya tekhnika i tekhnologiya = Bulletin of ASTU. Series: Marine engineering and technology. 2016, 2, 41-52. (in Russ.)*
3. Harlab V.D. *K tekhnicheskoy teorii kasatelnyih napryazheniy pri ploskom izgibe balok [On the technical theory of shear stresses in plane bending of beams] Vestnik grazhdanskih inzhenerov = Bulletin of Civil Engineers. 2016, 1(54), 82–88. (in Russ.)*
4. Harlab V.D. *Razvitie elementarnoy teorii kasatelnyih napryazheniy pri ploskom izgibe balok [Development of the elementary theory of shear stresses in plane bending of beams] Vestnik grazhdanskih inzhenerov = Bulletin of Civil Engineers. 2015, 1(48), 82–87. (in Russ.)*
5. Timoshenko S.P. *History of strength of materials. New York, 1953, 452. (in Eng.)*
6. Wilson E.L., Taylo R.L., Doherty W., Ghaboussi J. *Incompatible Displacement Models. Conference proceedings, «ONR Symposium on Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics»: - University of Illinois, Urbana, 1971. (in Eng.)*
7. Zienkiewicz O.C, Taylor R.L, Zhu J.Z. *The finite element method: Its basis and fundamentals. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005. (in Eng.)*
8. Bathe K.J. *Finite Element Procedures. Prentice Hall, NJ., 1996, 1038. (in Eng.)*
9. Strang G. *Variational Crimes in the Finite Element Method, in The Mathematical Foundations of the Finite Element Method. Academic Press. 1972, 689-710. (in Eng.)*
10. Wilson E.L. *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures. California, USA, 2002. (in Eng.)*
11. Thuy V.T. *Research on internal force and displacement of frame system when considering the effect of shear strain. Doctoral thesis, Hanoi Architectural University, 2010. (in Eng.)*
12. Cuong H.H. *The extreme Gauss's principle method. Journal of Science and Technology. 2005, 4, 112-118. (in Eng.)*
13. Do Thang. *An improved method of calculating beam deformation considering transverse shear strain. International Journal of GEOMATE. 2021, 21(83), 109-116. (in Eng.)*

С.Б. Ахажанов^{1*}, Е.Б. Утепов², Т.Б. Ахажанов²

¹Карагандинский университет имени Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

²Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

Информация об авторах:

Ахажанов Сунгат Беркинович – PhD, ассоциированный профессор, Карагандинский университет имени Букетова, Караганда, Казахстан

<https://orcid.org/0000-0002-0903-3517>, email: stjg@mail.ru

Утепов Елбек Бахитович – PhD, ассоциированный профессор, и.о. профессора, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

<https://orcid.org/0000-0001-6723-175X>, email: utepov-elbek@mail.ru

Ахажанов Талгат Беркинович – PhD, ассоциированный профессор, Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, Астана, Казахстан

<https://orcid.org/0000-0003-3346-4947>, email: talgat_a2008@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО ИЗГИБА СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА

Аннотация. В статье представлен усовершенствованный конечный элемент балки с учетом деформаций поперечного сдвига. Деформация поперечного сдвига учитывается с помощью параметра. Найдена основная зависимость и матрица жесткости конечного элемента балки с учетом деформации поперечного сдвига. Результаты расчетов сравниваются с аналитическими и численными методами.

Ключевые слова: конечный элемент балки, деформация поперечного сдвига, матрица жесткости, параметр поперечного сдвига, вертикальное перемещение.

S.B. Akhazhanov^{1*}, Ye.B. Utepov², T.B. Akhazhanov²

¹E.A. Buketov Karaganda University, Karaganda, Kazakhstan

²L.N. Gumilyov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan

Information about authors:

Akhazhanov Sungat Berkinovich – PhD, Associate Professor, Karaganda Buketov University, Karaganda, Kazakhstan

<https://orcid.org/0000-0002-0903-3517>, email: stjg@mail.ru

Utepov Yelbek Bakhitovich – PhD, Associate Professor, Acting Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

<https://orcid.org/0000-0001-6723-175X>, email: utepov-elbek@mail.ru

Akhazhanov Talgat Berkinovich – PhD, Associate Professor, L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

<https://orcid.org/0000-0003-3346-4947>, email: talgat_a2008@mail.ru

INVESTIGATION OF PLANE BENDING OF A ROD WITH ACCOUNT FOR TRANSVERSAL SHEAR DEFORMATIONS

Abstract. The article presents an improved beam finite element, taking into account transverse shear deformations. The transverse shear deformation is taken into account using a parameter. The main dependence and the stiffness matrix of the finite element of the beam are found taking into account the deformation of the transverse shear. The calculation results are compared with analytical and numerical methods.

Keywords: beam finite element, transverse shear deformation, stiffness matrix, transverse shear parameter, vertical displacement.