

УДК 624.074.012.45  
МНРТИ 30.15.27

<https://doi.org/10.51488/1680-080X/2021.2-38>

**Э.В.Бубнович<sup>1</sup>, Г.К.Абилденова<sup>1\*</sup>**

Казахский национальный технический университет имени К.И.Сатпаева,  
г. Алматы, Республика Казахстан

\* *Corresponding author:* [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

**Информация об авторах:**

Бубнович Эмилия Валентиновна – кандидат технических наук, ассоциированный профессор, Казахский национальный технический университет имени К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан  
<https://orcid.org/0000-0003-2039-6412>, email: a.gulnar\_91@mail.ru

Абилденова Гулнар Кайратовна – магистрант, Казахский национальный технический университет имени К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан  
<https://orcid.org/0000-0003-2039-6412>, email: a.gulnar\_91@mail.ru

## **КОЛЕБАНИЯ ГИБКОЙ ПОЛОГОЙ НИТИ ПРИ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ**

**Аннотация.** *Рассматриваются нелинейные бигармонические колебания гибкой нити с неподвижными опорами, расположенными на одном уровне. Выводятся амплитудно- и фазово-частотные характеристики колебаний нити на частоте суммарного и разностного тона, находятся условия существования таких колебаний.*

**Ключевые слова:** *гибкая пологая нить, бигармонические колебания, частота суммарного тона, частота разностного тона, амплитудно-частотная характеристика, фазово-частотная характеристика, скелетная кривая.*

**Введение.** Висячие системы являются одними из наиболее прогрессивных строительных конструкций в промышленном, гражданском и сельскохозяйственном строительстве.

Им присущи такие достоинства, как экономичность, архитектурная выразительность, максимальная индустриализация процессов монтажа. Поэтому разработка и совершенствование методов расчета висячих систем является одной из важных задач строительной механики.

Характерная особенность висячих систем заключается в том, что их очертание в значительной степени зависит от деформации. Возникает нелинейная связь между нагрузкой и перемещением. Это обстоятельство существенно осложняет исследование динамических явлений, поскольку делает задачу геометрически нелинейной.

В процессе эксплуатации висячие системы могут быть подвержены действию различных динамических нагрузок: от вибрационного оборудования, периодических, ударных, импульсивных возмущений и т.д.

В данной работе исследуются колебания гибкой пологой нити при бигармонических воздействиях, которые описываются нелинейным дифференциальным уравнением.

**Материалы и методы.** Интегро-дифференциальное уравнение колебаний нити [1] приводится к

$$\ddot{q}_i + \alpha \dot{q}_i + \alpha_i q_i + \lambda_i q_i^2 + \beta_i q_i^3 - \sigma_i q_i^4 - \gamma_i q_i^5 = R_{i1} \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + R_{i2} \sin(\omega_2 t + \varphi_2),$$

$$(1) (i = 1, 3, 5, \dots),$$

где  $q_i(t)$  - обобщенная координата;  $\lambda_i, \beta_i, \sigma_i, \gamma_i, \alpha$  - малые коэффициенты, зависящие от параметров нити и коэффициента демпфирования [1];

$$R_{ik} = \frac{2}{m_0 l} \int_0^l f_k(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx, \quad (k = 1, 2).$$

Найдем условия, при которых нить будет совершать колебания с частотой суммарного тона  $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ .

Необходимо отметить, что применение различных приближенных методов решения уравнения (1) в том случае, когда отношение частот гармонических составляющих  $r = \omega_2 / \omega_1$  является числом иррациональным, приводит к расходящимся рядам или последовательностям [2].

Поэтому будем считать, что  $r$  принадлежит полю рациональных чисел, кроме того, для определенности положим, что  $\omega_2 \geq \omega_1$ .

Зададимся решением (1) в виде

$$q_i = C_{i1} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + C_{i2} \sin(\omega_2 t + \psi_2) + S_i \sin(\Omega t + \psi_3),$$

$$(i = 1, 3, 5, \dots).$$

В этих выражениях первое и второе слагаемые определяют гармонические колебания нити с частотой  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , третье слагаемое представляет собой суммарный комбинационный тон на частоте  $\Omega$ .

Подставим (2) в (1). Тогда, используя некоторые тригонометрические тождества и приравнявая коэффициенты при  $\sin(\omega_1 t + \psi_1), \cos(\omega_1 t + \psi_1), \sin(\omega_2 t + \psi_2), \cos(\omega_2 t + \psi_2), \sin(\Omega t + \psi_3), \cos(\Omega t + \psi_3)$ , после некоторых преобразований получим систему шести нелинейных алгебраических уравнений относительно шести неизвестных  $C_{i1}, C_{i2}, S_i, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ :

$$(\alpha_i - \omega_1^2)C_{i1} + \lambda_i C_{i2} S_i \sin \Phi + \frac{3}{4} \beta_i (C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + 2S_i^2)C_{i1} - \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (2C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + S_i^2)$$

$$C_{i2} S_i \sin \Phi - \frac{5}{8} \gamma_i (C_{i1}^4 + 3C_{i2}^4 + 3S_i^4 + 6C_{i1}^2 S_i^2 + 6C_{i1}^2 C_{i2}^2 + 12C_{i2}^2 S_i^2)C_{i1} = R_{i1} \cos(\varphi_1 - \psi_1);$$

$$(3)$$

$$\alpha \omega_1 C_{i1} + \lambda_i C_{i2} S_i \cos \Phi - \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (2C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + S_i^2)C_{i2} S_i \cos \Phi = R_{i1} \sin(\varphi_1 - \psi_1);$$

$$(4)$$

$$(\alpha_i - \omega_2^2)C_{i2} + \lambda_i C_{i1} S_i \sin \Phi + \frac{3}{4} \beta_i (2C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + 2S_i^2)C_{i2} - \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2)$$

$$C_{i1} S_i \sin \Phi - \frac{5}{8} \gamma_i (3C_{i1}^4 + C_{i2}^4 + 3S_i^4 + 6C_{i2}^2 S_i^2 + 6C_{i1}^2 C_{i2}^2 + 12C_{i1}^2 S_i^2)C_{i2} = R_{i2} \cos(\varphi_2 - \psi_2);$$

$$(5)$$

$$\varkappa \omega_2 C_{i2} + \lambda_i C_{i1} S_i \cos \Phi - \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) C_{i2} S_i \cos \Phi = R_{i2} \sin(\varphi_2 - \psi_2); \quad (6)$$

$$(\alpha_i - \Omega^2) S_i - \lambda_i C_{i1} C_{i2} S_i \sin \Phi + \frac{3}{4} \beta_i (2C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) S_i - \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + 2S_i^2) \quad (7)$$

$$C_{i1} C_{i2} S_i \sin \Phi - \frac{5}{8} \gamma_i (3C_{i1}^4 + 3C_{i2}^4 + S_i^4 + 6C_{i1}^2 S_i^2 + 6C_{i2}^2 C_{i2}^2 + 12C_{i1}^2 C_{i2}^2) S_i = 0;$$

$$\varkappa \Omega S_i - \lambda_i C_{i1} S_{i2} \cos \Phi + \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + 2S_i^2) C_{i1} S_{i2} \cos \Phi = 0; \quad (8)$$

где

$$\Phi = \Psi_1 + \Psi_2 - \Psi_3.$$

К уравнениям (3)÷(6) можно применить итерационную последовательность действий, в результате которых определить амплитуды и фазовые углы гармонических колебаний на частоте  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Если в качестве исходных данных принять

$$\varkappa = \lambda_i = \beta_i = \sigma_i = \gamma_i = 0,$$

то в первом приближении будем иметь

$$C_{i1} = R_{i1} / (\alpha_i - \omega_1^2); \quad C_{i2} = R_{i2} / (\alpha_i - \omega_2^2); \quad (9)$$

$$\psi_1 = \varphi_1; \quad \psi_2 = \varphi_2;$$

**Результаты и обсуждение.** Подставляя эти выражения в уравнения (7) и (8), получим следующие амплитудно-частотные и фазово-частотные характеристики для суммарных тонов  $S_i$ ,  $\psi_3$ :

$$S_i^2 \{ [\alpha_i - \Omega^2 + \frac{3}{4} \beta_i (2C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) - \frac{5}{8} \gamma_i (3C_{i1}^4 + 3C_{i2}^4 + S_i^4 + 6C_{i1}^2 S_i^2 + 6C_{i2}^2 S_i^2 + 12C_{i1}^2 C_{i2}^2)]^2 + \varkappa \Omega^2 \} - \frac{3}{2} \sigma_i (C_{i1}^2 + C_{i2}^2 + 2S_i^2) C_{i1} C_{i2} - \lambda_i C_{i1} C_{i2} \}^2 = 0; \quad (10)$$

$$\Psi_3 = \psi_1 + \psi_2 + \arctg \left\{ \left[ \alpha_i - \Omega^2 + \frac{3}{4} \beta_i (2C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) - \frac{5}{8} \gamma_i (3C_{i1}^4 + 3C_{i2}^4 + S_i^4 + 6C_{i1}^2 S_i^2 + 6C_{i2}^2 S_i^2 + 12C_{i1}^2 C_{i2}^2) \right] / \varkappa \Omega \right\}. \quad (11)$$

Из уравнения (10) видно, что каждому значению частоты суммарного тона отвечает три вещественных корня неизвестных  $S_i^2$ .

Рассматривая выражение

$$\frac{3}{2} \sigma_i (C_{i1}^2 + C_{i2}^2) C_{i1} C_{i2} - \lambda_i C_{i1} C_{i2}, \quad (12)$$

заметим, что оно зависит от амплитуд гармонических составляющих  $R_{i1}$  и  $R_{i2}$ .

Скелетные кривые обычно описывают соотношения между амплитудой и частотой собственных колебаний системы без демпфирования. Поэтому, полагая равными нулю выражение (12) в (10) и коэффициент затухания  $\varkappa$ , получим уравнение скелетной кривой для колебания нити на частоте суммарного тона

$$\alpha_i - \Omega^2 + \frac{3}{4} \beta_i (2C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) - \frac{5}{8} \gamma_i (3C_{i1}^4 + 3C_{i2}^4 + S_i^4 + 6C_{i1}^2 S_i^2 + 6C_{i2}^2 S_i^2 + 12C_{i1}^2 C_{i2}^2) - 3\sigma_i C_{i1} C_{i2} S_i = 0. \quad (13)$$

Пример. Рассмотрим нить со следующими параметрами:  $l=10^2 \text{ м}$ ;  $E=1,57 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2$ ;  $F=12 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ;  $\alpha=0,3 \text{ 1/с}$ ;  $m_0=10 \text{ кг/м}$ ;  $R_{i1}=7 \text{ м/с}^2$ ;  $R_{i2}=4 \text{ м/с}^2$ ;

На рис. 1 построены графики зависимости амплитуд гармонических составляющих  $C_{i1}$  и  $C_{i2}$  от суммарной частоты  $\Omega$  при различных отношениях  $r = \omega_2 / \omega_1$ . При  $\Omega = [\alpha_i (r+1)^2 / r^2]^{1/2}$  амплитуда  $C_{i2}$  неограниченно возрастает.

Скелетные кривые (рис.2), достигая определенного максимума, дважды пересекают ось  $\Omega$ . При  $r=4,5$  они вырождаются в точку на оси  $\Omega$  и затем перестают существовать.

Амплитудно-частотные характеристики колебаний нити на частоте суммарного тона при  $r=1,2,3,4,5$  показаны на рис.3÷6 (пунктиром обозначены границы области устойчивости). Из рисунков видно, что они представляют собой афинно подобные кривые, причем с увеличением отношения  $\omega_2 / \omega_1$  происходит уменьшение амплитуды суммарного тона. При дальнейшем увеличении  $r$  ( $r>5$ ) амплитудная кривая исчезает.

Характерным является и то, что при больших отношениях частот амплитуды гармонических составляющих  $C_{i1}$  и  $C_{i2}$  становятся больше амплитуд суммарного тона колебаний.

Фазово-частотные характеристики, т.е. графики угловых величин  $\Psi_3 - \Psi_1 - \Psi_2$  для различных значений  $r$  представлены на рис.7.

Если рассматривать колебания гибкой полой нити на частоте разностного тона  $\tilde{\Omega} = \omega_2 - \omega_1$ , то выражение для амплитудно-частотной характеристики сохраняет вид (10), для фазово-частотной характеристики в этом случае имеем

$$\Psi_3 = \psi_2 - \psi_1 + \arctg \left\{ \left[ \alpha_i - \Omega^2 + \frac{3}{4} \beta_i (2C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) - \frac{5}{8} \gamma_i (3C_{i1}^4 + 3C_{i2}^4 + S_i^4 + 6C_{i1}^2 S_i^2 + 6C_{i2}^2 S_i^2 + 12C_{i1}^2 C_{i2}^2) \right] / \alpha \Omega \right\} \quad (14)$$

Здесь  $C_{i1}$ ,  $C_{i2}$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$  можно найти по формулам (3)÷(7) с заменой угла  $\Phi$  на  $\tilde{\Phi}$ , а также по формуле (6), которая будет иметь вид

$$\alpha \omega_2 C_{i2} + \lambda_i C_{i1} S_i \cos \tilde{\Phi} + \frac{3}{2} \sigma_i \cdot (C_{i1}^2 + 2C_{i2}^2 + S_i^2) C_{i1} S_i \cos \tilde{\Phi} = R_{i2} \sin(\varphi_2 - \psi_2); \quad (15)$$

где  $\tilde{\Phi} = \psi_1 + \psi_3 - \psi_2$

Формула (10), а также графики на рис. 3÷7 показывают, что амплитуда вынужденных колебаний нити с круговой частотой  $\Omega = \omega_1 + \omega_2$ , оказывается больше амплитуды вынужденных колебаний на частоте разностного тона. Для систем, описываемых уравнением типа Дуффинга, имеем обратную картину [4].

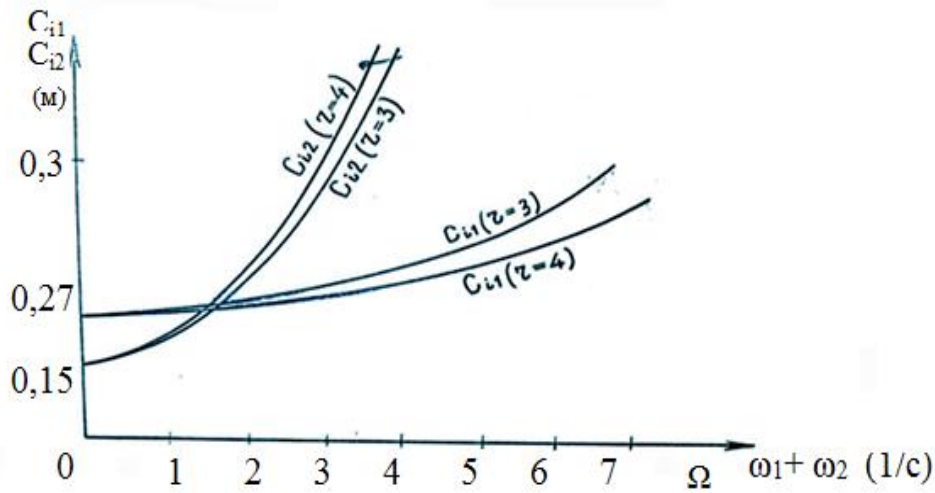


Рисунок 1 – Зависимость амплитуд гармонических составляющих  $C_{i1}$  и  $C_{i2}$  от суммарной частоты  $\Omega = \omega_1 + \omega_2$

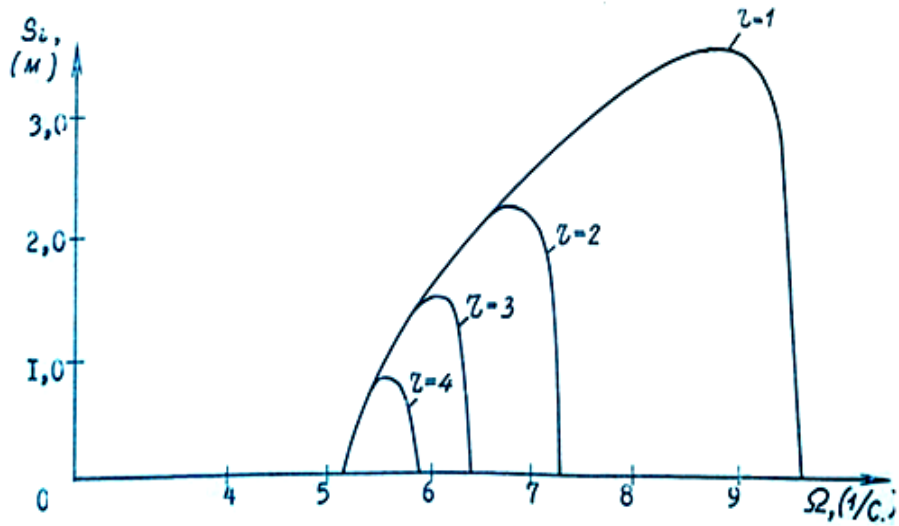


Рисунок 2 – Скелетные кривые

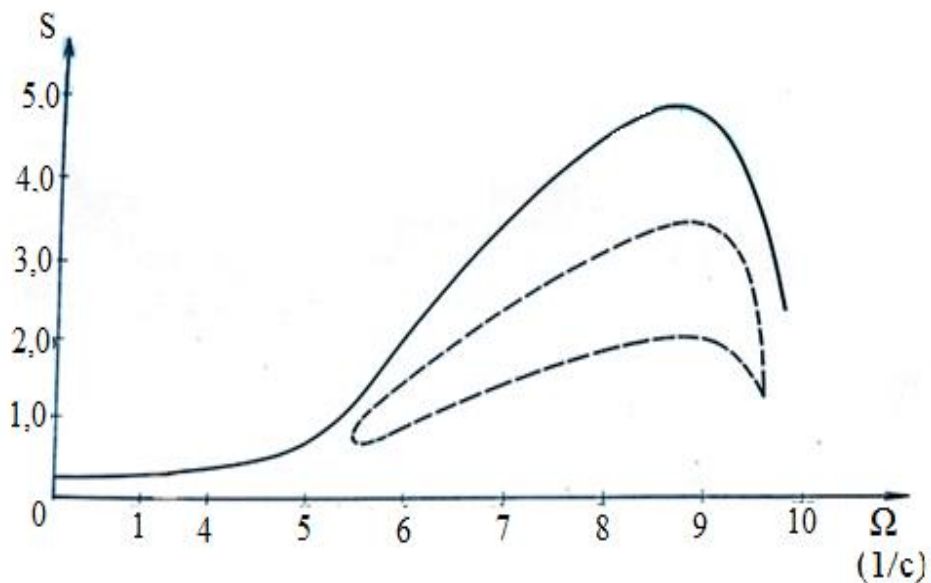


Рисунок 3 – Амплитудно-частотная характеристика колебаний нити на частоте суммарного тона при  $r=1$

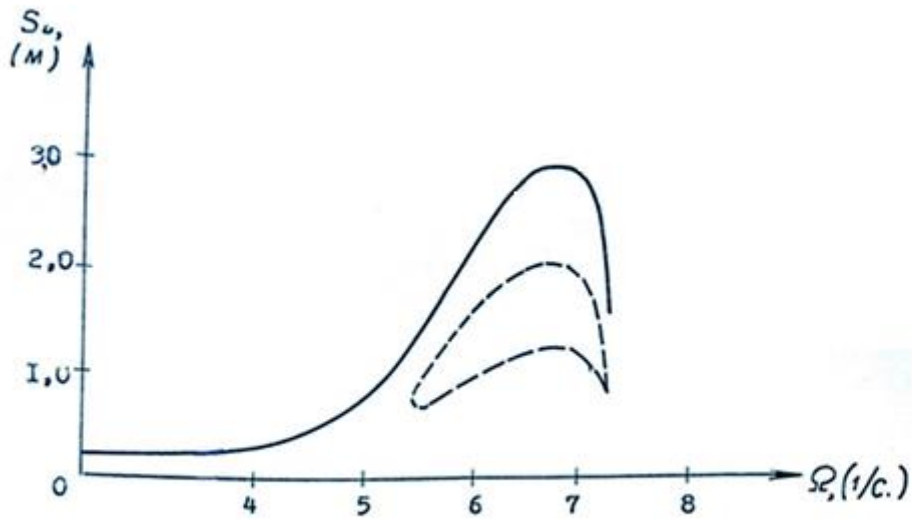


Рисунок 4 – Амплитудно-частотная характеристика колебаний нити на частоте суммарного тона при  $r=2$

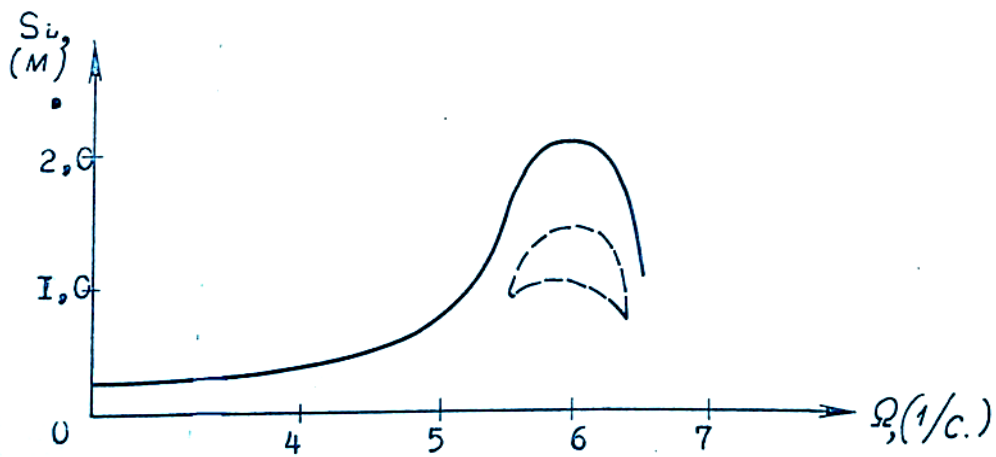


Рисунок 5 – Амплитудно-частотная характеристика колебаний нити на частоте суммарного тона при  $r=3$

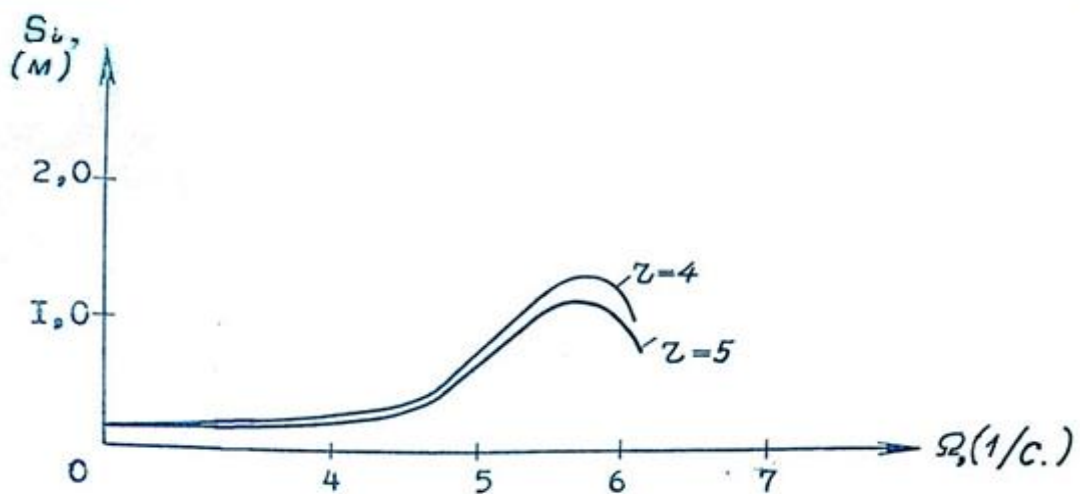


Рисунок 6 – Амплитудно-частотные характеристики колебаний нити на частоте суммарного тона при  $r=4$  и  $r=5$

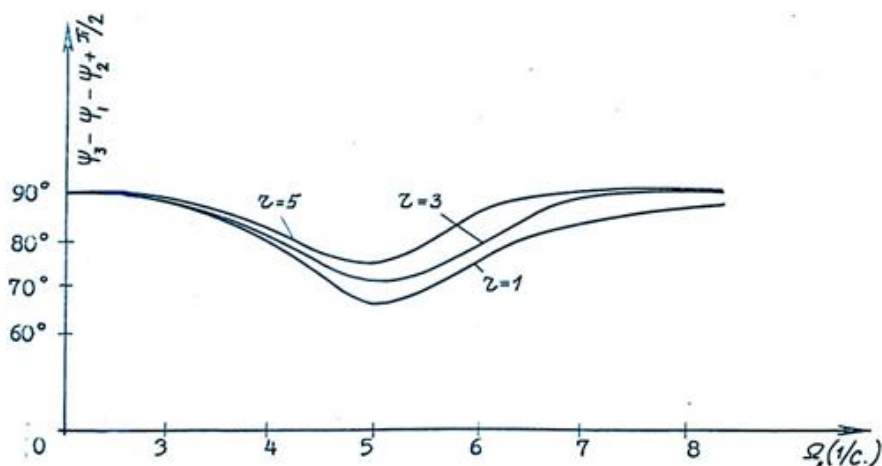


Рисунок 7 – Фазово-частотные характеристики колебаний нити на частоте суммарного тона при  $\zeta=1, 3, 5$ .

**Заклучение.** Получены амлитудно-частотные и фазово-частотные характеристики колебаний нити при бигармонических воздействиях на частоте суммарного и разностного тона. Построенные графики показывают, что они представляют собой афинно-подобные кривые, причем с увеличением отношения частот происходит уменьшение амплитуды колебаний суммарного тона. Амплитуда вынужденных колебаний на частоте суммарного тона оказывается больше амплитуды колебаний на частоте разностного тона.

С помощью критерия Рауса-Гурвица получены условия динамической устойчивости колебаний нити на частоте суммарного и разностного тона.

#### **Литература:**

1. Ивович В.А. Нелинейные колебания гибкой нити // «Строительная механика и расчет сооружений». – 1966. – № 5.
2. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. – М.: «Иностранная литература», 1953.
3. Бубнович Э.В., Калдыгазов К. Нелинейные колебания гибкой пологой нити при случайных импульсивных воздействиях // Вестник КазНТУ им. К.И. Сатпаева. – 2014. – №3.
4. Каудерер Г. Нелинейная механика. – М.: «Иностранная литература», 1961.

#### **References:**

1. V. A. Ivovich Nonlinear vibrations of a flexible thread // «Structural mechanics and calculation constructions». – 1966. – No.5.
2. Stoker J. Nonlinear oscillations in mechanical and electrical systems. – M.: «Foreign literature», 1953.
3. E.V. Bubnovich, K. Kaldygazov Nonlinear vibrations of a flexible shallow thread at accidental impulsive influences // Bulletin of KazNRTU them. K.I. Satpayev. – 2014. – No.3.
4. Kauderer G. Nonlinear mechanics. – M.: «Foreign Literature», 1961.

**Э.В.Бубнович<sup>1</sup>, Г.К.Абилденова<sup>1\*</sup>**

Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті,  
Алматы, Қазақстан

\* Corresponding author: [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

**Авторлар жайлы ақпарат:**

Бубнович Эмилия Валентиновна – техника ғылымдарының кандидаты, қауымдастырылған профессор, Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

<https://orcid.org/0000-0003-2039-6412>, email: [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

Абилденова Гулнар Кайратовна – техника ғылымдарының магистрі, Қ.И. Сәтбаев атындағы Қазақ ұлттық техникалық университеті, Алматы, Қазақстан

<https://orcid.org/0000-0003-2039-6412>, email: [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

## **БИГАРМОНИКАЛЫҚ ӘСЕРЛЕР ЖАНЫНДА ИЛГІШ ЖАЙПАҚ ЖІПТІҢ ТЕРБЕЛІСІ**

**Аңдатпа:** Бұл жұмыста амплитудалық және фазалық алынған жиынтық үндер үшін жіптің тебелістері жиілік сипаттамасы, сонымен қатар қисықтың жасушасымен теңдеу. Мысалды қарасақ, жиынтық жиіліктерінің  $\Omega$  амплитудаларының тәуелділігінен салынған графиктер, бұлардың гармоникалық біріктірулері  $r = \omega_2 / \omega_1$  әр түрлі қарым-қатынастарында. Амплитудалық-жиілік жиынтықтарының үнді жиілікте сипаттамасы сергекте ұқсас қисықтар  $r$  әр түрлі қарым-қатынастарында болады, және де қарым-қатынастары  $\omega_2 / \omega_1$  көбеюімен жиынтық үнді амплитуданың кемуінде болады.  $R$  амплитудалық қисықтық одан әрі көбеюде жоғалады. Алынған да айырма үнді жиілікте жіпті мәжбүр тербелістерді амплитуда жиынтық үнді жиілікте жіп тербелістер амплитудасы кем көрсетілетінін көрсеткен айырма үнді жиілікте жіптің тербелістері фазалық сипаттама амплитудалық, яғни біз көріністі алдық, Дуффинга жүйелер үшін кереғар түріндегі.

**Түйін сөздер:** жайпақ икемді жіп, бигармоникалық тербеліс, жиынтық үнді жиілік, айырма үнді жиілік, сипаттама амплитудалық-жиілік, фазалық - жиілік сипаттама, қаңқалы қисық.

**E.V.Bubnovich<sup>1</sup>, G.K.Abildenova<sup>1\*</sup>.**

K. I. Satpayev Kazakh National Technical University, Almaty, Kazakhstan

\*Corresponding author: [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

**Information about the authors:**

Bubnovich Emiliya – Ph.D., Associate Professor, K. I. Satpayev Kazakh National Technical University, Almaty, Kazakhstan

<https://orcid.org/0000-0003-2039-6412>, email: [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

Abildenova Gulnar – Magister, K. I. Satpayev Kazakh National Technical University, Almaty, Kazakhstan

<https://orcid.org/0000-0003-2039-6412>, email: [a.gulnar\\_91@mail.ru](mailto:a.gulnar_91@mail.ru)

## **FLUCTUATIONS OF A FLEXIBLE FLAT THREAD AT BIHARMONIC INFLUENCES**

**Summary:** In work amplitude and phase and frequency characteristics of fluctuations of a thread for total tones, and also the equation of a skeletal curve are received. We will review an example. Here schedules of dependence of amplitudes of harmonious components on total frequency  $\Omega$  are constructed at various relations. Amplitude-frequency characteristics at a frequency of total tone at various relations of  $r$  represent affinely similar curves, and to increase in the relation there is a reduction of amplitude of total tone. At further increase in  $r$  the amplitude curve disappears. Also amplitude and phase characteristics of fluctuations of a thread at a frequency of differential tone which show are received that amplitude of the compelled fluctuations of a thread at a frequency of differential tone appears less than amplitude of fluctuations of a thread at a frequency of total tone, i.e. we received the picture opposite for systems like Duffinga.

**Keywords:** flexible flat thread, biharmonic fluctuations, frequency of total tone, frequency of differential tone, amplitude-frequency characteristic, phase and frequency characteristic, skeletal curve.