УДК 536.1
https://doi.org/10.51488/1680-080X/2020.4-34

**Д. Оканов[1], И.М. Полякова[2]**
[1]магистрант факультета общего строительства,
[2] научн. рук., к.т.н., ассоц. проф.,
[1,2] Международная образовательная корпорация (КазГАСА),
г. Алматы, Казахстан

# АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИЙ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ АРОЧНОГО ТИПА

**Аннотация.** *Для нахождения точных формул для расчета прогиба статически определимой фермы применялся метод индукции. Рассматриваемая ферма является подобием модели стропильной фермы «Молодечно» [1-3], которая часто используется в покрытиях портовых сооружений. Предлагаемая модель довольно сильно увеличивает высоту рабочего помещения, так как имеет большой подъем. Размеры фермы определяются количеством панелей и 2-мя геометрическими параметрами. В предположении упругой работы составляющих фермы вычисляется ее прогиб.*

***Ключевые слова:*** *индукция, аналитическое решение, прогиб, ферма.*

## Введение

Прочные, легкие, относительно недорогие ферменные конструкции часто используются в зданиях и сооружениях гражданского и промышленного назначения: в мостовых элементах как элементы ребер жесткости, портовых кранах, гидротехнических сооружениях, портовых складах, навесах и других конструкциях. Плоская балочная ферма с треугольной решеткой типа «Молодечно» с небольшим уклоном (до 10%) применяется особенно часто. Так как фермы данного типа апробированы довольно хорошо, имеется большое количество таблиц усилий в ферменных стержнях, полученных численно различными способами. Расчет усилий проводится способом вырезания узлов. Направляющие косинусы усилий вычисляются по исходным координатам узлов, т.е. идеальных шарниров. Система уравнений записывается в виде матрицы. Приложенные к узлам фермы нагрузки, заносятся в вектор правой части системы. Прежде чем вывести аналитическую зависимость прогиба от количества панелей и провести соответствующий асимптотический анализ, нужно определить этот прогиб по формуле Максвелла-Мора с индукцией по количеству панелей. Предлагаемая модель ферменной конструкции также имеет треугольную решетку (рисунок 1) и стержни раскоса одинаковой h длины (рисунок 2). Определяем количеством панелей в половине пролета и размерами a и b всю геометрию фермы.

$$h = (a^2 + b^2) / (2b) = c^2 / (2b) \qquad (1)$$

Через данные параметры выражается длина раскоса (рисунок 2).

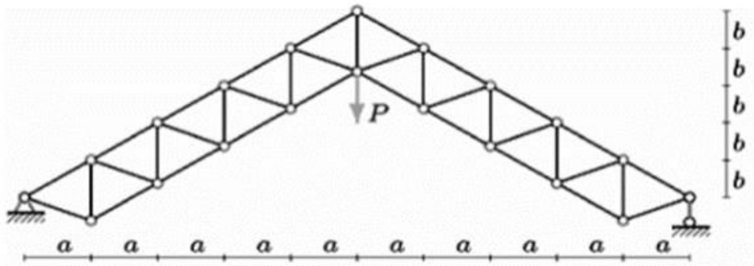


Рис. 1 – Нагружение центрального узла фермы при n = 5

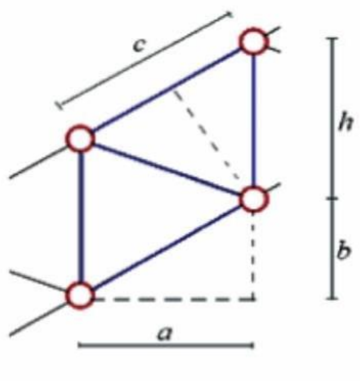


*Рис. 2.* Панель фермы длиной *a*

Примем за цель получить аналитическое решение для НДС ферменной конструкции в зависимости от количества панелей, геометрических параметров и величины нагрузки. Первая зависимость (от количества панелей) более сложная. Расчет усилий в стержнях фермы и ее прогиба для точного, хоть и очень большого количества панелей, является стандартной задачей, которая выполняется в аналитическом или численном виде в учебных курсах по сопромату и строительной механике. Нужно отметить, что исходя из равенства эффективной жесткости [2], формулы, как правило, сводятся к замене фермы сплошным брусом, поэтому в зависимости от количества панелей для прогиба фермы зачастую не очень точны и редки. Для некоторого количества видов плоских статически определимых ферм-балок такое решение есть [3]. Помимо этого, найдены аналитические решения (более громоздкие) и для статистики неопределимых [4], и для пространственных систем [5], [6]. У численных решений есть, кроме всего прочего, один недостаток перед аналитическими: численные методы теряют точность решения для ферм с большим количеством панелей, в то время как аналитические решения остаются с изначальной погрешностью.

Из-за наличия современных аналитических программ Maxima, MathCad, Mathematica, Maple и других, которые дают решение в символьном виде без потери точности, исследователь может подумать, что изъяны у этих систем отсутствуют. Но опыт их использования показывает, что здесь имеется ограничение другого рода – это время счета. Когда задается цель получить точное решение для ферменных конструкций с большим количеством панелей (а, следовательно, и с большой матрицей системы линейных уравнений способа вырезания узлов), то можно заметить, что, начиная с некоторого количества стержней, время счета становится слишком большим. Из этого следует, что метод индукции остается единственным выходом для преодоления так называемого «проклятия больших размерностей».

Решим задачу для выбранной фермы, используя отработанный метод индуктивного получения формул для усилий в стержнях фермы и ее прогиба. Методика состоит в решении задач в аналитическом виде, выводе степеней коэффициентов и нахождении их общих членов или в получении их последовательностей при имеющихся заранее параметрах конструкции.

**Основная часть**

Все утверждения можно разделить на две большие группы: общие и частные утверждения. Пример общего утверждения: диагонали всех ромбов перпендикулярны. Несомненно, истинное общее утверждение. А частным утверждением являлось бы следующее: диагонали ромба MNPQ перпендикулярны. В данном случае мы говорим про конкретный объект. Так, индукция – это переход от частных утверждений к общим. То есть, у нас есть какая-то группа частных утверждений, а мы пытаемся найти какую-то закономерность в них, обобщить и сказать, что это верно для всех объектов и явлений подобного класса или рода.

Однажды, ученый Ферма заметил следующую закономерность: если два возвести в степень два в степени ноль плюс один, получится три, два возвести в степень два в степени один плюс один, получится пять и т.д., продолжая ряд, числа, которые получаются справа, являются простыми.

$$2^{2^0}+1=3$$

$$2^{2^1}+1=5$$

$$2^{2^2}+1=17$$

$$2^{2^3}+1=257$$

$$2^{2^4}+1=65537$$

Исходя из этого, Ферма решил, что открыл способ нахождения простых чисел. Это являлось бы очень важным открытием и по сей день, так как этот метод помог бы сделать огромный шаг, например, в защите информации. Ведь поиск больших простых чисел – это очень важная задача.

Но прошло несколько десятилетий, другой известный ученый, математик Эйлер, решил сделать следующий шаг и возвел степенную двойку в степень 5 и получил в ответе 641*6700417. Таким образом, на шестом шаге вся концепция Ферма ломается. Что мы этим способом хотели сказать? Любой переход от частных утверждений к общему требует доказательства. Т.е. индукция – это не то, что верно само по себе, это то, что необходимо доказать.

Метод мат. индукции представляет собой метод доказательства различных утверждений. Он заключается в следующем: для того, чтобы доказать, что некоторое математическое утверждение является верным для любого натурального числа n, достаточно доказать, во-первых, что это утверждение верно для числа n=1, и во-вторых, что если это утверждение верно для какого-нибудь натурального числа n, то оно будет также верным для следующего числа n+1.

Ферменная конструкция, которая содержит n панелей в середине пролета (также учитывая опорную панель с тремя стержнями), имеет 2n стержней верхнего пояса, 2n - 2 – нижнего, 2n раскосов и 2n – 1 стоек. В общем, в ферме 8n стержней, учитывая 3 опорные стержня, которые моделируют опоры фермы - подвижную справа и неподвижную слева. Примем эти стержни жесткими. Ферма содержит 4n узлов. В итоге получаем статически определимую систему: записывая по 2 уравнения равновесия в проекции на оси координат для каждого узла, получим 8n неизвестных усилий в стержнях и 8n уравнений для них. Слева направо пронумеруем шарниры фермы. Для удобства сделаем это сначала по нижнему, потом – по верхнему поясу. Выберем начало координат в левой неподвижной опоре и введем в программу системы Maple координаты узлов:

$$x_i = ai,\ i = 1, ..., 2n - 1;$$
$$y_i = (i - 1)b,\ i = 1, ..., n,\ y_i = (2n - 1 - i)b,\ i = n, ..., 2n - 1;$$
$$x_{i+2n-1} = (i - 1)a,\ i = 1, ..., 2n + 1;$$
$$y_{i+2n} = y_i + h,\ i = n, \ldots, 2n - 1;$$
$$y_{2n} = y_{2n+1} - b,\ y_{4n} = y_{4n-1} - b$$

Введем структуру решетки фермы конфигурационными векторами $V_i$ = 1, ..., m. Первой компонентой этих векторов является номер шарнира ферменной конструкции в условном начале этого вектора, второй – номер шарнира в его конце. Выбор направления векторов не зависит от усилий или их знаков и просто определяет структуру соединений стержней фермы, которая, в свою очередь, необходима для составления уравнений равновесий шарниров (узлов).

Для стержней нижнего пояса имеем следующие векторы: $V_i = [i, i+1]$, i = 1,...,2n-2:

-верхнего пояса: $\bar{V}_{i+2n-2} = +2n-2 = [i-1 + 2n, i + 2n]$, i = 1, ..., 2n;

-стойки решетки: $\bar{V}_{i+4n-2} = [i, i + 2n]$, i = 1, ..., 2n-1;

-раскосы решетки: $\bar{V}_{i+6n-3} = [i, i + 2n - 1]$, $\bar{V}_{i+7n-3} = [i + n - 1, i + 3n]$, i = 1, ..., n.

Далее необходимо найти длины стержней и их проекции векторных представлений для вычисления косинусов углов усилий в уравнениях равновесия способа вырезания узлов ферменной конструкции, записанных в проекциях на оси координат:

$$l_i = \sqrt{l_{1,i}^2 + l_{2,i}^2};\ l_{1,i} = x_{v_{2,i}} - x_{v_{1,i}};\ l_{2,i} = y_{v_{2,i}} - y_{v_{1,i}};\ i = 1, \ldots, m,$$

где m – количество стержней фермы.

1-ый индекс в номере $V_{j,i}$ принимает значения 1 или 2 и соответствует номеру компоненты вектора $V_i$, 2-ой – номер стержня.

Матрица направляющих косинусов G имеет данные элементы:

$$G_{k,i} = -l_{j,i} / l_i;\ k = 2V_{i,2} - 2 + j;\ k < m,\ j = 1,2;\ i = 1, ..., m;$$

$$G_{k,i} = l_{j,i} / l^i;\ k = 2V_{i,1} - 2 + j;\ k < m;\ j = 1,2;\ i = 1, ..., m.$$

Задача определения усилий в стержнях ферменной конструкции сводится к решению системы линейных уравнений. Запишем ее в матричной форме:

$$G\overline{S} = \overline{B},$$

где B – вектор нагрузок длиной m; S – вектор неизвестных усилий.

Горизонтальные нагрузки, которые приложены к узлу i, заносятся в нечетные элементы $B_{2i-1}$ вертикальные – в четные $B_{2i}$. Решение данной задачи намного удобнее находить с помощью обратной матрицы $S = G^{-1}B$.

Используемый метод очень хорошо реализуется в системе Maple [7], [8], потому что при изменении нагрузки не требует повторного решения системы. В нашей задаче две такие нагрузки: единичная сила по направлению искомого прогиба и внешняя нагрузка.

Прогиб определим по формуле Максвелла-Мора:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m\to 3} \frac{S_{i,P} S_{i,l} l_i}{EA},$$

где $S_{i,P}$– усилие в стержне i от действия внешней нагрузки; $S_{i,l}$ – усилие в стержне i от действия единичной силы по направлению искомого перемещения.

В этом случае единичная сила прикладывается в середине пролета к узлу нижнего пояса. Рассчитывая по формуле (1) прогиб в ферменных конструкциях с различным количеством панелей (n = 1, ..., 8), замечаем общий вид формулы для прогиба и получаем последовательность коэффициентов при $c^2b^4$, $c^6$ и $c^3b^3$. С помощью оператора rgf_findrecur из пакета genfunc системы Maple получим рекуррентные уравнения для этих коэффициентов. Например, для коэффициента при $c^3b^3$, который обозначим $K_3$, имеем следующее уравнение:

$$K_{3,n} = 4K_{3,n-1} - 6K_{3,n-2} + 4K_{3,n-3} - K_{3,n-4}.$$

Решение этого уравнения, т.е. нахождение общего члена последовательности, находим с помощью оператора rsolve, который встроен в систему и не требует подключения специального пакета. В итоге получим искомую формулу для относительного прогиба Δ = AEF / P при n> 1,

$$\Delta = \frac{1}{8bc^4}\left(K_1c^2c^4 + K_2c^6 + K_3c^3b^3\right), \qquad (2)$$

где $K_1 = 16n^2$; $K_2 = 4n - 5$; $K_3 = 16n(1 + 2n^2)/3$; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Собственный вес конструкции можем смоделировать узловой нагрузкой, которую приложим к верхнему или нижнему поясу либо к обоим поясам одновременно. Как показывает практика, результат во всех 3-х вариантах нагрузки получается примерно одинаковым. Примем нагрузку приложенной к нижнему поясу (рисунок 3).

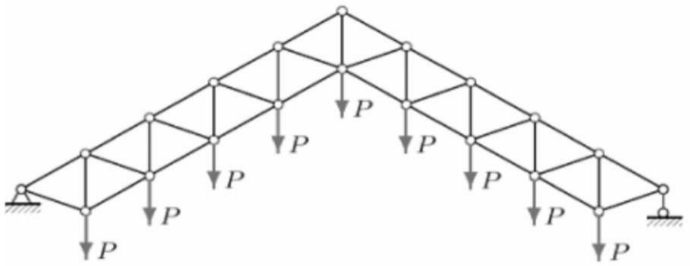


Рис. 3 – Нагружение нижнего пояса фермы при n = 5

Формула для прогиба середины пролета имеет такой же вид, как и формула (2), имея отличия лишь в коэффициентах, имеющие при таком нагружении следующий вид:

$$K_1 = 16n^3;\ K_2 = 4n^2 – 10n + 11;\ K^3 = 8n^2(1 + 5n^2)/3.$$

Заметим, что в данном случае для нахождения закономерности потребовалась последовательность длиной 14, в то время как при нагружении одной силой можно было обойтись всего лишь восьмью членами. Найденная закономерность справедлива при n> 2.

Рассмотрим ферму заданного пролета L = 2na = 300 м. Зависимость (2) прогиба от количества панелей обнаруживает минимум, как в случае нагружения фермы силой в середине пролета (рисунок 4 а, первый вариант нагрузки), так и в случае равномерной нагрузки по нижнему поясу (рисунок 4 б, второй вариант нагрузки).

Во втором варианте принимается, что суммарная нагрузка $P_8$ на ферму не меняется при изменении количества панелей: $P_8 = (2n - 1)P$, $\Delta = \Delta EF / P_8$. Отметим также несколько неожиданный максимум кривых на рисунке 4а и меньший прогиб (при той же величине нагрузки) в случае равномерного ее распределения по нижней панели (рисунок 4б). Этот максимум имеет сугубо теоретическое значение, так как для выбранной гипотетической длины фермы в 300 м практическое количество панелей начинается с 20 - 30, так, чтобы длина панели не превышала 5-10 м. Аналогичные кривые, которые построены по формуле (2) для ферменной конструкции с более реальной длиной 20-100 м не имеют каких-либо особенностей и представляют собой монотонно возрастающие зависимости прогиба от количества панелей.

Кривые зависимости прогиба от количества панелей при больших n приближаются к кубической параболе. Действительно, при нагружении центрального узла имеем $\lim_{n\to\infty}\Delta\frac{4b}{3}$ и при загрузке нижнего пояса $\lim_{n\to\infty}\Delta\frac{5b}{6}$. Операцию вычисления предела выполняет оператор limit(Delt/n^3,n=infinity) системы Maple.

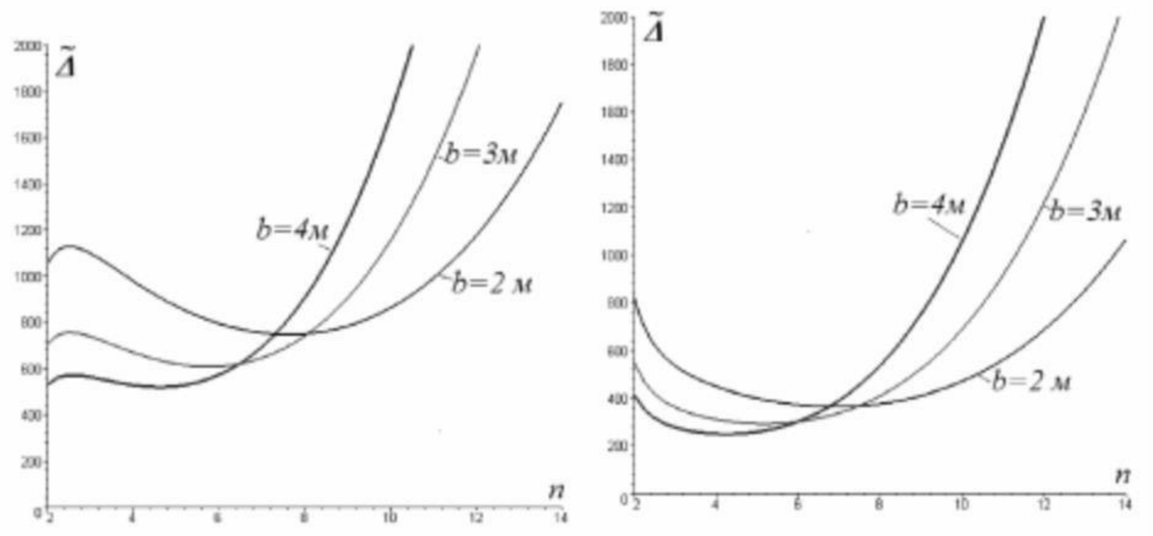


Рис. 4 – Нагружение центрального узла фермы (а), нагружение ее нижнего пояса (б)

## Выводы

Для прогиба фермы арочного типа получены формулы с применением системы компьютерной математики с помощью метода индукции. В этой задаче главной трудностью являлось найти зависимость решения от количества панелей.

При такой связи найденные формулы становятся наиболее универсальными, что позволяет также выполнять некоторое число асимптотических исследований. В частности, показано кубическое влияние количества панелей при достаточно большом их количестве на кривую прогиба.

Система Maple в расчетах понадобилась в 2-х случаях: для определения общего члена последовательностей при решении рекуррентных уравнений и для получения решения в символьной форме.

Данный метод решения будет полезен для всех. Инженеры-практики могут использовать результаты при получении простой оценки жесткости конструкции. Программисты могут применять этот метод для простой и надежной тестовой оценки.

***Литература:***

1. *Кузнецов И.Л. Новые конструктивные решения стальных каркасов легких многопролетных зданий / И.Л. Кузнецов, М.А. Салахутдинов, Л.Р. Гимранов // Известия*

*Казанского государственного архитектурно-строительного университета. – 2011. – № 1 (15). – С. 88-92.*
2. *Марутян А.С. Минимальная высота стальных ферм и их перекрестных систем, включая модули покрытий и перекрытий типа «Пятигорск» / А. С. Марутян, М. Б. Григорьян // Современная наука и инновации. – 2013. – № 1. – С. 52-62.*
3. *Реутов Д.О. Индуктивный анализ прогиба фермы регулярной структуры в системе Maple / Д.О. Реутов // Междунар. науч.-практ. конференция ИТ0Н-2014. IV-й междунар. семинар и междунар. школа «Математическое и компьютерное моделирование фундаментальных объектов и явлений в системах компьютерной математики»: материалы конф. и тр. семинара. – Казань: Изд-во ООО «Фолиант», 2014. – С. 256-261.*
4. *Кирсанов М.Н. Аналитический расчет многорешетчатой фермы / М.Н. Кирсанов // Строительная механика и расчет сооружений. – 2014. – № 6. – С. 2-6.*
5. *Кирсанов М.Н. Изгиб, кручение и асимптотический анализ пространственной стержневой консоли / М.Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2014. – №5 (49). – С. 37-43.*
6. *Кирсанов М.Н. Анализ прогиба фермы прямоугольного пространственного покрытия / М.Н. Кирсанов // Инженерно-строительный журнал. – 2015. – № 1 (53). – С. 32-38.*
7. *Heyman J. Design of a simple steel truss / J. Heyman // Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings. – 2010. – Vol. 163. – No. 1. – P. 53-56.*

*Статикалық түрде анықталған ферманың қисаюын есептеу үшін нақты формулалар индукция арқылы табылады. Бұл ферма порт қондырғыларының жабындарында кеңінен қолданылатын «Молодечно» фермасының схемасының аналогы болып табылады. Ұсынылған ферма схемасы үлкен өсумен сипатталады, сондықтан жұмыс бөлмесінің биіктігін едәуір арттырады. Ферманың өлшемдері екі геометриялық параметрмен және панельдер санымен анықталады. Ферманың иілген жері оның элементтерінің серпімді жұмысын ескере отырып есептеледі.*

***Түйін сөздер:*** *индукция, аналитикалық шешім, иілетін жер, ферма.*

*Exact formulas for calculating the deflection of a statically definable truss are obtained by induction. This truss structure is similar to the model of the truss «Molodechno» [1], which is often used in the coatings of port facilities. The proposed model greatly increases the height of the working room as it has a large rise. The dimensions of the truss are determined by the number of panels and two geometric parameters. Assuming elastic work of the truss components, its deflection is calculated.*

***Key words:*** *induction, analytical solution, deflection, truss.*