УДК 536.1
https://doi.org/10.51488/1680-080X/2020.4-19

М.Б. Айтуганов[1], И.М. Полякова[2]
[1]магистрант факультета общего строительства,
[2]научн. рук. – к.т.н., ассоц. проф.[2]
[1,2]Международная образовательная корпорация (КазГАСА),
г. Алматы, Казахстан

СТАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК

Аннотация. *Рассматривается оболочка вращения с неравномерным армированием, выводится система статических уравнений с учетом неоднородности, вызванной неравномерным армированием на основе физических и геометрических соотношений между деформациями и напряжениями.*

Ключевые слова: *равновесие, оболочка вращения, внутренние усилия, напряжения, перемещения.*

Рассмотрим уравнения равновесия. Одно из уравнений равновесия может быть составлено в интегральной форме – это сумма проекций на ось симметрии сил, приложенных к конечному участку оболочки (рис. 1 а, б):

$$\left(N_1 \sin\theta - Q\cos\theta\right)2\pi\, r = F(s), \tag{1}$$

где $F(s)$ – суммарная осевая нагрузка на выделенную часть оболочки. Величина $F(s)$ складывается из осевой нагрузки P_0 на верхний край оболочки и проекций на ось распределенных по поверхности участка нагрузок q_1 и q_n, т.е.

$$F_s = Q\cdot 2\pi r = p_0 \pi\, r_0^2 + \int_{S_0}^{S}\left(q_n \cos\theta - q_1 \sin\theta\right)2\pi\, r ds \,. \tag{2}$$

$$\frac{d}{ds}(Q_Z \cdot 2\pi r) = (q_n \cos\theta - q_1 \sin\theta)2\pi\, r$$

$$\frac{d}{ds}(Q_Z \cdot r) = (q_n \cos\theta - q_1 \sin\theta)\, r$$

Если осевая нагрузка P_0 на торец оболочки известна, то $F(s)$ – известная функция дуги s. Если P_0 представляет собой статически неопределимую реакцию опоры, то она вводится в расчет как «лишнее неизвестное» и в дальнейшем определяется из условия равенства нулю осевого перемещения на опоре.

При расчете оболочек вращения удобно наряду с проекциями N_1 и Q усилия в сечении, нормальном к меридиану, рассматривать проекции этого усилия на направление оси симметрии оболочки и нормали к оси (рис.1, в).

Осевая составляющая усилия равна в сечении $\frac{F(s)}{2\pi\, r}$, а нормальная к оси симметрии $Q_r = N_1\cos\theta + Q\sin\theta$; составляющая Q_r называется распорной силой.

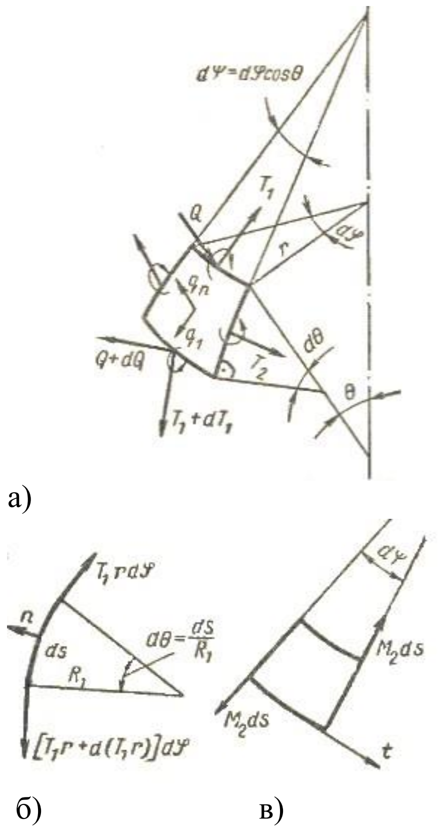

Рис. 1

Рассмотрим теперь равновесие элемента оболочки, выделенного двумя меридиональными сечениями и двумя сечениями, нормальными к меридиану (рис. 1, а) для элемента симметрично нагруженной оболочки можно составить три нетождественных уравнения равновесия: два уравнения проекций на какие-либо направления, лежащие в меридиональной плоскости, и одно уравнение моментов относительно оси, нормальной к этой плоскости.

Составим сумму проекций сил на направление нормали к элементу. В уравнение равновесия входят: проекция внешней нагрузки $q_n r d\varphi\, ds$ ($r d\varphi\, ds$ – площадь элемента), разница в величинах поперечных сил, приложенных к нижней и верхней граням элемента, $d(Q_1 r)d\varphi$, а также проекции на нормаль приложенных к элементу сил N_1 и N_2. Как видно из рис. 1, б, проекция на нормаль n сил N_1 с точностью до малых высшего порядка составляет $-N_1 r d\varphi\,\frac{ds}{R_1}$.

Аналогично, рассматривая нормальное к меридиану сечение элемента, найдем, что проекция на нормаль сил N_2 равна $-N_2 ds\,\frac{r d\varphi}{R_2}$.

Таким образом, сумма проекций всех сил на направление нормали составляет:

$$d(Q_1 r)d\varphi - N_1 r d\varphi\,\frac{ds}{R_1} - N_2 r d\varphi\,\frac{ds}{R_2} + q_n r d\varphi\, ds = 0$$

или, после сокращения на $r d\varphi\, ds$,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{ds}(Q_1 r) - \frac{N_1}{R_1} - \frac{N_2}{R_2} + q_n = 0 \quad . \tag{3}$$

Составим теперь уравнение моментов сил относительно касательной t к параллели, проходящей через нижнюю грань элемента. В это уравнение войдут разница между моментами M_1, приложенными к нижней и верхней граням элемента,

$$(M_1 + dM_1)(r + dr)d\varphi - M_1 r d\varphi = d(M_1 r)d\varphi \, ,$$

момент приложенной к верхней грани поперечной силы $-Q_1 r d\varphi ds$, а также проекции моментов $M_2 ds$, приложенных к боковым граням. Для того чтобы вычислить эти три проекции, изобразим моменты в виде векторов (рис. 1, в) и установим, что угол между этими векторами $d\psi = \frac{r d\varphi}{r/\cos\theta} = d\varphi \cos\theta$. Поэтому проекция векторов на направление t составляет

$$-M_2 ds d\psi = -M_2 ds d\varphi \cos\theta \, .$$

Момент относительно t распределенных нагрузок представляет собой малую высшего порядка. Итак, уравнение моментов имеет вид

$$d(M_1 r)d\varphi - M_2 ds d\varphi \cos\theta - Q_1 r d\varphi ds = 0$$

или, после сокращения на $r d\varphi \, ds$,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{ds}(M_1 r) - M_2 \frac{\cos\theta}{r} - Q_1 = 0 \quad . \tag{4}$$

Кроме уравнений равновесия (1)-(4), можно также составить условие равновесия нулю суммы проекций на направление меридиана всех приложенных к элементу сил (рис. 1). Это уравнение имеет вид

$$d(N_1 r)d\varphi - N_2 ds d\psi + Q r d\varphi d\theta + q_1 r d\varphi ds = 0 \, ,$$

где опущены малые высших порядков. После сокращения на $r d\varphi \, ds$ и подстановки

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = \cos\theta \, , \quad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R_1}$$

получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{ds}(N_1 r) - \frac{\cos\theta}{r} N_2 + \frac{Q}{R_1} + q_1 = 0 \quad . \tag{5}$$

$$\frac{du_r}{ds} = \varepsilon_1 \tag{6}$$

$$\frac{du_z}{ds} \cos\theta - \vartheta\sin\theta = \varepsilon_1 \quad \sin\theta + \vartheta\cos\theta \tag{7}$$

Выразим удлинение кольцевого волокна ($\varepsilon_2 = \frac{u_r}{r}$) через силу интенсивности N_2:

$$N_2 = \frac{E_2 h}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_2 + \frac{E_1}{E_2}\nu_2\varepsilon_1) = c_2(\varepsilon_2 + \frac{E_1}{E_2}\nu_2\varepsilon_1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \varepsilon_2 = \frac{N_2}{c_2} - \frac{E_1}{E_2}\nu_2\varepsilon_1.$$

Подставим это значение в выражение для N_1:

$$N_1 = \frac{E_1 h}{1-\nu_1\nu_2}(\varepsilon_1 + \frac{E_2}{E_1}\nu_1\varepsilon_2) = c_1(\varepsilon_1 + \frac{E_2}{E_1}\nu_1\varepsilon_2)$$

$$= c_1(\varepsilon_1 + \frac{E_2}{E_1}\nu_1(\frac{N_2}{c_2} - \frac{E_1}{E_2}\nu_2\varepsilon_1)) = c_1(\varepsilon_1 + \frac{E_2}{E_1}\nu_1\frac{N_2}{c_2} - \nu_1\nu_2\varepsilon_1))$$

$$= c_1\varepsilon_1 + \frac{c_1}{c_2}\frac{E_2}{E_1}\nu_1 N_2 - c_1\nu_1\nu_2\varepsilon_1.$$

Подставляя в это выражение N_2, получим:

$$N_1 = c_1\varepsilon_1 + \frac{c_1}{c_2}\frac{E_2}{E_1}\nu_1 c_2(\varepsilon_2 + \frac{E_1}{E_2}\nu_2\varepsilon_1) - c_1\nu_1\nu_2\varepsilon_1$$

$$= c_1\varepsilon_1 + c_1\frac{E_2}{E_1}\nu_1\varepsilon_2 + c_1\frac{E_2}{E_1}\nu_1\frac{E_1}{E_2}\nu_2\varepsilon_1 - c_1\nu_1\nu_2\varepsilon_1$$

$$= c_1\varepsilon_1 + c_1\frac{E_2}{E_1}\nu_1\varepsilon_2 + c_1\nu_1\nu_2\varepsilon_1 - c_1\nu_1\nu_2\varepsilon_1 = c_1\varepsilon_1 + c_1\frac{E_2}{E_1}\nu_1\varepsilon_2;$$

Выразим из последнего выражения ε_1:

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1}{c_1} - \frac{E_2}{E_1}\nu_1\varepsilon_2 = \frac{N_1}{c_1} - \frac{E_2}{E_1}\nu_1\frac{u_r}{r}.$$

Учитывая, что $N_1 = Q_z\sin\theta + Q_r\cos\theta$, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{N_1}{c_1} - \nu_1\frac{E_2}{E_1}\frac{u_r}{r} = \frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1 h}(Q_z\sin\theta + Q_r\cos\theta) - \nu_1\frac{E_2}{E_1}\frac{u_r}{r}$$

или, что тоже:

$$\varepsilon_1=\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1h}Q_z\sin\theta+\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1h}Q_r\cos\theta-\nu_1\frac{E_2}{E_1}\frac{u_r}{r}.$$

Подставляя это выражение в (6) и (7), получим:

$$\frac{du_r}{ds}=\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1h}Q_z\sin\theta\cos\theta+\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1h}Q_r\cos^2\theta-\nu_1\frac{E_2}{E_1}\cos\theta\frac{u_r}{r}-\vartheta\sin\theta,$$

$$\frac{du_z}{ds}=\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1h}Q_z\sin^2\theta+\frac{1-\nu_1\nu_2}{E_1h}Q_r\sin\theta\cos\theta-\nu_1\frac{E_2}{E_1}\sin\theta\frac{u_r}{r}+\vartheta\cos\theta.$$

Как известно, $\kappa_1=\frac{d\vartheta}{ds},\ \kappa_2=\frac{\cos\theta}{r}\vartheta$. Подставим эти значения в $M_1=D_1(\kappa_1+\frac{E_2}{E_1}\nu_1\kappa_2)$, получим $M_1=D_1(\frac{d\vartheta}{ds}+\frac{E_2}{E_1}\nu_1\frac{\cos\theta}{r}\vartheta)$. После преобразования имеем $\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{M_1}{D_1}-\frac{E_2}{E_1}\nu_1\frac{\cos\theta}{r}\vartheta$, или, окончательно:

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_1h^3}M_1-\frac{E_2}{E_1}\nu_1\frac{\cos\theta}{r}\vartheta.$$

Из уравнения проекций всех сил на направление нормали с учетом $N_1=Q_z\sin\theta+Q_r\cos\theta,\ Q_1=-Q_z\cos\theta+Q_r\sin\theta$,

$$\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left[\left(-Q_z\cos\theta+Q_r\sin\theta\right)r\right]-\frac{Q_z\sin\theta}{R_1}-\frac{Q_r\cos\theta}{R_1}-\frac{\nu_2}{R_2}\left(Q_z\sin\theta+Q_r\cos\theta\right)-\frac{E_2h}{R_2}\frac{u_r}{r}+q_n=0$$

получим:

Так как $\frac{1}{R_2}=\frac{\sin\theta}{r}$ и $\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{R_1}$, $N_2=\nu_2N_1+E_2h\varepsilon_2$,

то преобразуем:

$$\frac{N_2}{R_2}=\frac{\nu_2N_1+E_2h\frac{u_r}{r}}{R_2}=\frac{\nu_2}{R_2}\left(Q_z\sin\theta+Q_r\cos\theta\right)+\frac{E_2h}{R_2}\frac{u_r}{r}.$$

Вспомним, что

$$\frac{d}{ds}(rQ_z)=\left(q_n\cos\theta-q_1\sin\theta\right)r,$$

$\frac{dr}{ds}=\cos\theta$, $-\left(q_n\cos\theta-q_1\sin\theta\right)\cos\theta+q_n=q_r\sin\theta$,

тогда:

$$-\frac{\quad}{d\theta\; r}\cos\theta_{ds}+\frac{1\,d(Q_z r)}{r}\sin\theta_{ds}+Q\;\frac{1\,d(Q_r r)}{}\sin\theta\;{}_z+$$
$$ds$$

$$+Q_r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}-Q_z\sin\theta\frac{d\theta}{ds}-Q_r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}-$$

$$-\frac{\nu_2\sin^2\theta}{r}Q_z-\frac{\nu_2\cos\theta\sin\theta}{r}Q_r-\frac{E_2h\sin\theta}{r^2}u_r+q_n=$$

$$=-\left(q_n\cos\theta-q_1\sin\theta\right)\cos\theta+q_n+\frac{dQ_r}{ds}\sin\theta+\frac{Q_r}{r}\frac{dr}{}$$

$$ds\frac{\sin\theta-}{r}-\frac{\nu_2\sin^2\theta}{r}Q_z-\frac{\nu_2\cos\theta\sin\theta}{r^2}Q_r-E_2h\sin\theta\;u_r=$$

$$=q_r\sin\theta+\frac{dQ_r}{ds}\sin\theta+\frac{Q_r}{r}\cos\theta\sin\theta-\frac{\nu_2\sin^2\theta}{r}Q_z-$$

$$-\frac{\nu_2\cos\theta\sin\theta}{r}Q_r-\frac{E_2h\sin\theta}{r^2}u_r=q_r+\frac{dQ_r}{ds}+\frac{Q_r}{r}\cos\theta-\frac{\nu_2\sin\theta}{r}Q_z$$

$$-\frac{\nu_2\cos\theta}{r}Q_r-\frac{E_2h}{r^2}u_r=0$$

$$\frac{dQ_r}{ds}=\frac{E_2h}{r^2}u_r+\frac{\nu_2\cos\theta}{r}Q_r+\frac{\nu_2\sin\theta}{r}Q_z-\frac{Q_r}{r}\cos\theta-q_r$$

$$\frac{dQ_r}{ds}=\frac{E_2h}{r^2}u_r-\frac{(1-\nu_2)\cos\theta}{r}Q_r+\frac{\nu_2\sin\theta}{r}Q_z-q_r$$

Из условия

$\frac{d}{ds}(rQ_z)=\left(q_n\cos\theta-q_1\sin\theta\right)r$, с учетом $q_z=-q_n\cos\theta+q_1\sin\theta$:

$$r\frac{dQ_z}{ds}+Q_z\frac{dr}{ds}=r\frac{dQ_z}{ds}+Q_z\cos\theta=-q_z\cdot r$$

$$\frac{dQ_z}{ds}=-\frac{\cos\theta}{r}Q_z-q_z\cdot r$$

.

$\cos\theta$ Из уравнения моментов, учитывая, что $M_1=\nu_2M_2+\frac{E_2h^3}{12}\vartheta_r$, получим:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{ds}\left(M_1r\right)-M_2\frac{\cos\theta}{r}-Q_1=0$$

$$\frac{1}{r} r \frac{dM_1}{ds} + \frac{1}{r} M_1 \frac{dr}{ds} - M_2 \frac{\cos\theta}{r} - Q_1 = 0$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \frac{M_1}{r}\frac{dr}{ds} - \nu_2 M_1 \frac{\cos\theta}{r} - \frac{E_2 h^3}{12}\frac{\cos\theta}{r}\vartheta\frac{\cos\theta}{r} - Q_1 = 0$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \frac{M_1}{r}\cos\theta - \nu_2 M_1 \frac{\cos\theta}{r} - \frac{E_2 h^3}{12}\frac{\cos\theta}{r}\vartheta\frac{\cos\theta}{r} - Q_1 = 0$$

$$\frac{dM_1}{ds} + M_1\left(\frac{\cos\theta}{r} - \nu_2\frac{\cos\theta}{r}\right) - \frac{E_2 h^3 \vartheta}{12 r^2}\cos^2\theta - Q_1 = 0$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \frac{(1-\nu_2)\cos\theta}{r} M_1 - \frac{E_2 h^3 \vartheta}{12 r^2}\cos^2\theta - Q_1 = 0$$

$$\frac{dM_1}{ds} + \frac{(1-\nu_2)\cos\theta}{r} M_1 - \frac{E_2 h^3 \vartheta}{12 r^2}\cos^2\theta + Q_z\cos\theta - Q_r\sin\theta = 0$$

$$\frac{dM_1}{ds} = \frac{E_2 h^3 \vartheta}{12 r^2}\cos^2\theta + Q_r\sin\theta - Q_z\cos\theta - \frac{(1-\nu_2)\cos\theta}{r} M_1 .$$

Таким образом, искомая система дифференциальных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{du_r}{ds} = \dfrac{1-\nu_1\nu_2}{E_1 h} Q_z \sin\theta\cos\theta + \dfrac{1-\nu_1\nu_2}{E_1 h} Q_r \cos^2\theta - \nu_1\dfrac{E_2}{E_1}\cos\theta\,\dfrac{u_r}{r} - \vartheta\sin\theta \\ \dfrac{du_z}{ds} = \dfrac{1-\nu_1\nu_2}{E_1 h} Q_z \sin^2\theta + \dfrac{1-\nu_1\nu_2}{E_1 h} Q_r \sin\theta\cos\theta - \nu_1\dfrac{E_2}{E_1}\sin\theta\,\dfrac{u_r}{r} + \vartheta\cos\theta \\ \dfrac{d\vartheta}{ds} = \dfrac{12(1-\nu_1\nu_2)}{E_1 h^3} M_1 - \dfrac{E_2}{E_1}\nu_1\dfrac{\cos\theta}{r}\vartheta \\ \dfrac{dQ_r}{ds} = \dfrac{E_2 h}{r^2} u_r - \dfrac{(1-\nu_2)\cos\theta}{r} Q_r + \dfrac{\nu_2\sin\theta}{r} Q_z - q_r \\ \dfrac{dQ_z}{ds} = -\dfrac{\cos\theta}{r} Q_z - q_z\cdot r \\ \dfrac{dM_1}{ds} = \dfrac{E_2 h^3\vartheta}{12 r^2}\cos^2\theta + Q_r\sin\theta - Q_z\cos\theta - \dfrac{(1-\nu_2)\cos\theta}{r} M_1 \end{cases}$$

Литература:

1. *Бидерман В.Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высшая школа, 2009. – 416 с.*
2. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. – М.: Машиностроение, 2010. – 287 с.*

Біркелкі емес арматураланған айналу қабығы қарастырылады, деформациялар мен кернеулер арасындағы физикалық және геометриялық арақатынастар негізінде біркелкі емес арматуралаудан туындаған біртектілікті ескере отырып, статикалық теңдеулер жүйесі шығарылады.

Түйін сөздер: *тепе-теңдік, қабықша, ішкі күштер, кернеу, орын ауыстыру.*

The shell of rotation with uneven reinforcement is considered, a system of static equations is derived taking into account the heterogeneity caused by uneven reinforcement based on physical and geometric relationships between deformations and stresses.

Key words: *counterbalance, rotational shell, internal force, tensioning, motion.*