

**С. Тоқтарбай<sup>1</sup>, Ә.Ж. Абылаева<sup>2</sup>,  
Г.Н. Худайбергенова<sup>3</sup>, Б.С. Насырова<sup>4</sup>**

<sup>1,2,3,4</sup>әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті,  
Алматы қ., Қазақстан Республикасы

**КВАДРУПОЛЬ МАССАНЫҢ АЙНАЛАСЫНДАҒЫ  
АККРЕЦИЯЛЫҚ ДИСКІЛЕР**

**Аңдатпа.** Бұл жұмыста біз ықшам нысандардың сыртқы статикалық осьтік-симметриялық гравитациялық өрісін қарастырамыз. Біз квадруполды параметрі бар Шварцшильд шешімінің қарапайым жалпылануы болып табылатын  $q$ -метриканың қасиеттерін зерттейміз. Геодезиялық сызық теңдеуі өріс теңдеулерінен алынады және сынақ бөлшектің орбиталары зерттелген. Біз квадруполь массаның айналасында дөңгелек орбиталар бойымен қозғалатын сынақ бөлшектің орбиталарының тұрақтылық қасиеттерін қарастырамыз. Квадрупольдың сынақ бөлшектерінің аккрециялық дискісінің қасиеттерін түбегейлі өзгертетінін көрсетеміз.

**Түйін сөздер:** квадруполь, ықшам объектілер, геодезия, аккрециялық диск,  $q$ -метрика, қара құрдым.

### **Кіріспе**

Аккрециялық диск – массивтік орталық денеге айналу моменті бар заттардың құлауы нәтижесінде пайда болатын құрылым (көбінесе жұлдыз маңындағы диск). Орталық дене әдетте жұлдыз болып табылады. Үйкеліс дискідегі айналған заттарды орталық денеге қарай спиральға бағыттайды. Гравитациялық және үйкеліс күштері заттардың температурасын төмендетеді және көтереді, электромагниттік сәулеленуді тудырады. Бұл сәулеленудің жиілік диапазоны орталық объектінің массасына байланысты. Жас жұлдыздар мен протожұлдыздың аккрециялық дискілері инфрақызыл диапазонда, ал нейтрондық жұлдыздар мен қара құрдымдардың айналасындағы дискілер рентген жиілігінде шығарылады [1, 2].

Аккрециялық диск – газдың, плазманың, шаңның немесе бөлшектердің кез келген астрономиялық объектінің айналасындағы диск тәрізді ағыны, онда объектінің гравитациялық өрісінде айналатын зат баяу ішке қарай айналған кезде энергия мен бұрыштық моментті жоғалтады. Астрофизикада аккреция термині оның гравитациялық тартылуына байланысты кез келген аспан объектісінің массасының өсуін білдіреді. Жұлдыздар мен планеталардың пайда болуы, квазарлардың күшті сәулеленуі, радиогалактика, рентгендік қос жұлдыздар, сондай-ақ, асқынжана жұлдыздар, бұлардың бәрі аккрециялық дискілерге байланысты. Массасы өсетін астрономиялық объект аккретор (accretor) деп аталады [3].

### **Физикалық сипаттамасы**

Аккрециялық диск жинақталған зат жеткілікті айналу немесе бұрыштық моменті болған кезде пайда болады, ол түзу сызық бойымен аккретордың ішіне түсіп кетпеуі үшін пайда болады. Аккретордың айналу осіне перпендикуляр бағытта ағын дискіде тегістеледі, өйткені айналу заттардың ағуына қарсы тұрады.

Айналу осіне параллель бағыттарда зат дискідегі жылу қысымы гравитациялық күшке тең болғанша жазықтыққа қысылады.

Егер сығылуға қарсы тұратын қысымы гравитациялық күші мен айналдырумен салыстырғанда аз болса, диск тігінен қысылады, диск геометриялық жұқа болады және оның қалыңдығы радиалды ұзындығынан әлдеқайда аз болады. Егер қысым күштері айналу мен ауырлық күшімен салыстырылатын болса, онда аккрециялық диск геометриялық қалың болады, ол дискіге қарағанда тор тәрізді болады [4].

Диск ішіндегі зат спиральға айналады, өйткені ол турбуленттілік пен тұтқырлыққа байланысты энергия мен бұрыштық моментті жоғалтады. Тұтқырлық, турбуленттілік немесе үйкелістің басқа түрлері болмаған кезде, орталық объектінің айналасында айналатын материал дискінің экваторлық жазықтығына тез түсіп, содан кейін дөңгелек орбиталарда жүре береді. Сондықтан заттың ішке қарай қозғалуы және аккреция болуы үшін бұрыштық моментті тарататын үйкелістің белгілі бір түрі қажет [5].

Аккректор пайда болатын жұлдыз немесе планета, қалыпты жұлдыз немесе ақ ергежейлі, нейтрондық жұлдыз немесе қара құрдым сияқты ықшам объект болуы мүмкін. Аккрециялық дискілер гравитациялық потенциалдық энергияны радиацияға айналдырудан көп мөлшерде энергия шығарады, өйткені аккрециялық заттар ішке қарай спиральға түседі немесе бұралады. Егер аккректор нейтрондық жұлдыз немесе қара тесік болса, аккреция термоядролық реакцияларға қарағанда энергияны тиімдірек шығаруы мүмкін, сондықтан ол ғаламдағы ең энергетикалық нысандарды, соның ішінде квазарларды, радио галактикаларды және рентгендік Қос жұлдыздарды қоректендіреді деп саналады.

Аккрециялық диск үшін масса көзі серіктес жұлдыздың материалы (рентгендік егіздер мен катаклизмдік айнымалылар жағдайында), жұлдызаралық орта (галактиканың белсенді ядролары жағдайында) немесе протопланетарлық дискідегі шаң мен газ (планеталар пайда болған жағдайда) болуы мүмкін [6]. Диск ішіндегі физикалық жағдайлар және диск материалының көзі оның физикалық жағдайы мен химиялық құрамын анықтайды.

Аккрециялық дискілердегі әдеттегі тығыздық пен температураны ескере отырып, тұтқырлық ішкі дрейфті тудыруы мүмкін. Үйкеліс турбуленттілікке байланысты, кез келген магнит өрісін күшейтетін дискінің айналуына байланысты пайда болады деп саналады. Бұл турбуленттілік тиімді тұтқырлықты қамтамасыз етеді, бұл артық бұрыштық моментті сыртқа тасымалдау кезінде заттың ішке қарай жылжуына әкеледі [7].

Диск материалы орталық нысанға аккредация жасау үшін энергияны жоғалтуы керек болғандықтан, дискідегі материал қызады және шығарылған жылу дискінің екі жағынан да шығады. Аккректор нейтрондық жұлдыз немесе қара тесік болатын рентгендік Қос жүйелерде аккрециялық дискілердегі температура бірнеше мыңнан бірнеше миллионға дейін өзгереді. Сондықтан диск инфрақызыл сәуледен толқын ұзындығының төмен энергиялы (жұмсақ) рент-

гендік диапазонына дейін жарық шығарады. Көбінесе дискінің бөліктері буланып, жоғары энергиялы (қатты) рентген диапазонында сәуле шығаратын күн тәжіне ұқсас төмен тығыздықтағы ыстық тәжді құрайды [8].

Көптеген әр түрлі аккрециялық нысандар, соның ішінде квазарлар, радио галактикалар, рентгендік қос және жас жұлдыздар аккредиционды материалдың бір бөлігін өз полюстерінен дыбыстан жоғары ағындар түрінде шығарады (бұл ағындар магнит өрісінің сызықтарында пайда болатын магниттік күштермен қозғалады, олар дискінің айналуымен спиральды түрде бұралып, оған перпендикуляр бағытталған [9]).

### Квадруполь масса айналасындағы аккрециялық диск

Ықшам нысандардың ең кемінде екі жалпы қасиеті болатыны анық, олар өз өсінен айналады және сфералық симметриядан ауытқыған болады. Өстік симметриялық гравитациялық өрісті сипаттайтын метрикалар саны көп, алайда ең қарапайымы және квадрупольдік моментті ескеретіні  $q$ -метрика болып табылады [16]. Бұл метрика белгілі Шварцшильд метрикасының квадруполь  $q$  параметрі бойынша жалпыланған түрі.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q} dt^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left[ \left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)} \left( \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right) \right] \quad (1)$$

Бұл шешім әдебиеттерде  $\delta$ -метрика немесе  $\gamma$ -метрика деп аталады және оны алғаш рет Зипой мен Вурхиз анықтаған [9].  $q$  параметрінің рөлін атап өту үшін квадруполь метрикасы ( $q$ -метрика) терминін қолдануды ұсынылған [16].  $q$  метрика - бұл асимметриялық дәл вакуумдық шешім және  $q \rightarrow 0$  кезінде Шварцшильд метрикасына дейін азаяды. Ол асимптотикалық түрде тегіс, қисықтықтың орталық ерекшелігі  $r=0$  және сыртқы ерекшелігі  $r=2m$ , ол жалаңашсингулярлы болып келеді. Герохтың анықтамасына сәйкес тәуелсіз мультипольдік сәттер монополь  $M_0 = m(1+q)$  және квадруполь  $M_2 = -\frac{m^3}{3}q(1+q)(2+q)$ . Қосымша ақпарат алу үшін [10] қараңыз.

Бірінші жуықтауда аккрециялық дискіні орталық масса айналасында дөңгелек орбиталарда қозғалатын сынақ бөлшектерінің жиынтығы ретінде қарастыруға болады. Бұл жағдайда экваторлық жазықтықтағы геодезиялық теңдеулер тиімді потенциалдағы қозғалыс теңдеулеріне эквивалентті

$$V_{eff}^2(r, q) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{q+1} \left[ \frac{l^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^q + \zeta \right] \quad (2)$$

мұндағы  $E$  және  $l$  - тұрақты қозғалыстар. Дөңгелек орбиталардың радиусы мен тұрақтылығының қасиеттері тиімді потенциалдың қасиеттерін толығымен

анықталады, бұл өз кезегінде бірінші және екінші радиалды туындылардың қасиеттеріне байланысты [11]. Біз тиімді потенциалдың қасиеттеріне егжей-тегжейлі талдау жүргіздік. Бұл зерттеудің нәтижелері 2 суретте жинақталған. Тұрақтылық аймағы аккрециялық диск болуы мүмкін кеңістіктік аймақты анықтайды, ал соңғы тұрақты дөңгелек орбитаның радиусы дискінің минималды ішкі радиусы ретінде түсіндіріледі.

Дөңгелек орбиталардың тұрақтылығын зерттеу орталық гравитациялық көздің айналасында аккрециялық дискілердің болу мүмкіндігін анықтау үшін маңызды. Атап айтқанда, соңғы тұрақты дөңгелек орбитаның радиусы аккрециялық дискінің ішкі радиусын анықтайды және потенциалдың иілу нүктесіне келеді, яғни

$$\partial^2 \Phi / \partial r^2 = 0 \quad \text{және} \quad \partial^2 \Phi^2 / \partial r^2 = 0$$

шарттары орындалатын нүктеге сәйкес келеді [12]. Біз осы екі шартты соңғы тұрақты дөңгелек орбита үшін  $l^2$  және  $\theta^2$  мәндерін табу және алу үшін қолданамыз.

$$l_{sco}^2 = \frac{m(1+q)\sin^2 \theta r^2}{r-(3+2q)m} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left[1 - \frac{(r-m)G}{r(r-2m)[r-(3+2q)m]H}\right] \quad (3)$$

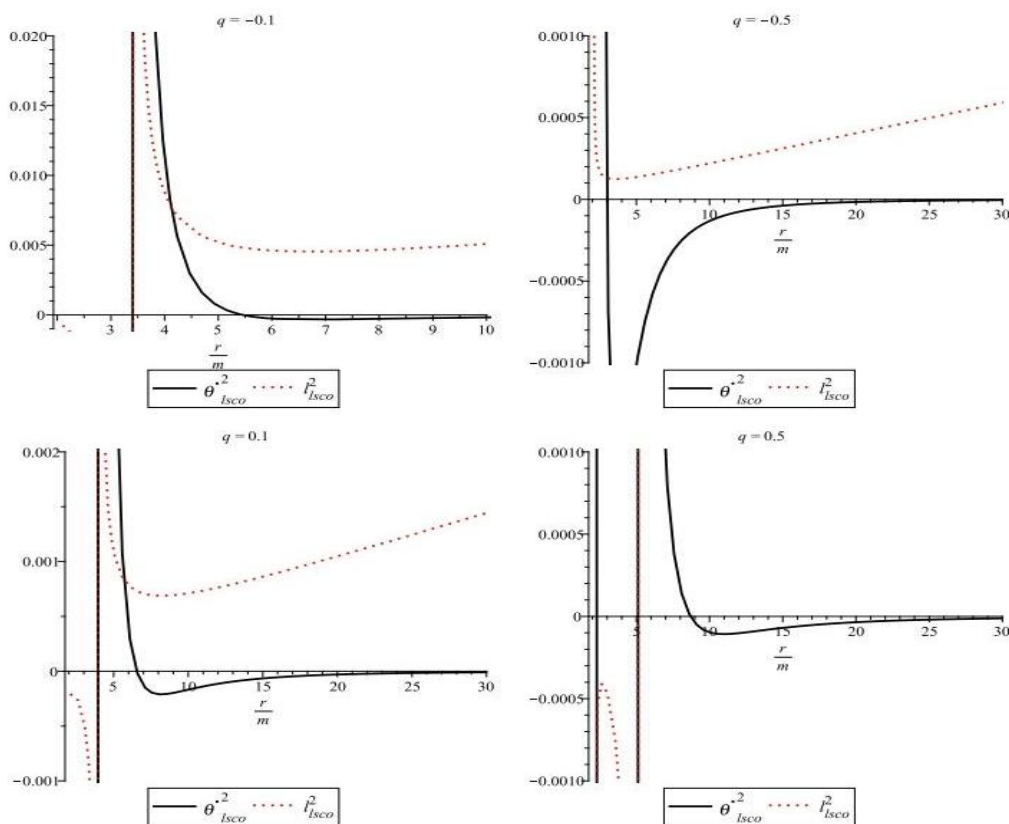
$$\dot{\theta}_{sco}^2 = \frac{m(1+q)\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{q-1} (r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta)^{(1+2q+q^2)} G}{r^4 [r-(3+2q)m] (r^2 - 2mr)^{q(2+q)} [r^2 - 2mr + m^2 (1+q) \sin^2 \theta]} H \quad (4)$$

$$G \equiv r^2 - 2m(4+3q)r + 2m^2(2+q)(3+2q) \quad (5)$$

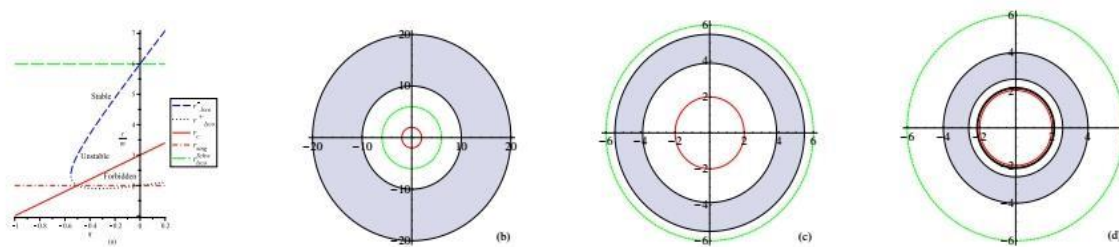
$$H \equiv 1 + \frac{r-m}{(r^2 - 2mr)[r-(3+2q)m]} \left[3r^2 - 6m(3+2q)r + 4m^2(2+q)(3+2q) + \frac{2q(2+q)(1+q)^2 m^4 \sin^4 \theta (r-m)[r-(3+2q)m]}{(r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta)[r^2 - 2mr + m^2 (1+q) \sin^2 \theta]}\right] \quad (6)$$

Шварцшильд ғарыштық уақытының шекті жағдайында ( $q=0$ ) сфералық симметрияның арқасында біз  $\dot{\theta}_{isco} = 0$  орнатып,  $r_{isco}^{Sch} = 6m$  мәнін күткендей аламыз.  $l_{isco}^2$  мәні соңғы тұрақты дөңгелек орбитада зерттелетін бөлшектің бұрыштық моментін және  $\dot{\theta}_{isco}^2$ -полярлық бұрышқа қатысты орбитаның жылдамдығын анықтайды. 4-суретте біз квадруполдың әртүрлі мәндері үшін жоғарыдағы теңдеулерге сандық талдау жасаймыз [13]. Соңғы тұрақты дөңгелек орбиталардың болуының шарты  $l_{isco}^2$  ретінде, сонымен  $\dot{\theta}_{isco}^2$  оң және соңғы болып табылады [14]. 1-суретте біз  $q = 0.5$  және  $q = -0.5$  үшін бұл шарттар орындалмайтынын көреміз. Алайда  $q = 0.1$  және  $q = -0.1$  үшін  $R$  аралығы бар, онда  $l_{isco}^2$  және  $\dot{\theta}_{isco}^2$  оң болады. Біріншіден, бұл аралық әрқашан Шварцшильд радиусының ішінде болады  $r_{isco}^{Sch} = 6m$ . бұл квадруполь моменті соңғы тұрақты дөңгелек орбитаның радиусын

азайтады дегенді білдіреді. Нақты оң мән үшін  $\theta_{isco}^2$  графиктен тиісті  $r_{isco}$  радиусын табуға болады. Егер бұл мән  $l_{isco}^2$  оң мәніне сәйкес келсе, онда осындай радиусы мен бұрыштық моменті бар тұрақты дөңгелек орбита бар [15].



1-сурет – Соңғы тұрақты дөңгелек уақыт орбитасының бұрыштық моменті және полярлық бұрыштық жылдамдығы  $q$  квадруполь параметрінің әртүрлі мәндеріндегі радиалды координатаға байланысты. Мұнда  $\theta = \pi / 4$ .  $l_{isco}^2$  мәні  $\theta_{isco}^2$  графигімен салыстыру үшін барлық графиктерде масштабталды.



2-сурет – а) квадрупольға байланысты соңғы тұрақты дөңгелек орбитаның радиусы.  $r_c = m(3 + 2q)$  критикалық радиусынан төмен қозғалысқа жол берілмейді. Сондай-ақ  $r_{sing} = 2m$ , сыртқы сингулярлығы құрастырылады  $q$  оң болады (б),  $q - 0.5 > q > 0$  (с) және  $q = -0.52$  в (д) үшін аккрециялық дискілер келтірілген.

## Қорытынды

Бірінші жуықтау ретінде аккрециялық дискісін орталық массаның айналасында орбита бойымен қозғалатын сынақ бөлшектердің жиынтығы ретінде қарастыруға болады. Бұл жағдайда экваторлық жазықтықтағы геодезиялық теңдеулер тиімді потенциалдағы қозғалыс теңдеулеріне тең болады. Тиімді потенциалдың қасиеттерін егжей-тегжейлі талдау жасадық. Қорыта келгенде,  $q$  оң мәндерінде аккрециялық диск әрқашан соңғы тұрақты дөңгелек орбитаның Шварцшильд радиусынан тыс екенін көреміз  $r_{sco}^{sch} = 6m$ .  $q$  теріс мәндерінде диск толығымен радиусының ішінде болуы мүмкін  $r_{sco}^{sch} = 6m$ . Соңында  $0.5$ -ке жақын  $q$  мәндерінде екінші ішкі диск сыртқы сингулярлыққа өте жабық аймақта пайда болады  $r_{sing} = 2m$ .

Квадраттық параметр аккрециялық дискілердің геометриялық құрылымын түбегейлі өзгерте алады деген қорытындыға келеміз. Сондықтан дискінің геометриялық қасиеттері бойынша  $q$  мәнін анықтау мүмкіндігі болуы керек.

## Әдебиеттер/ Refe:

1. Nowak, Michael A.; Wagoner, Robert V. (1991). «Diskoseismology: Probing accretion disks. I - Trapped adiabatic oscillations». *Astrophysical Journal*. 378: 656–664. Bibcode: 1991ApJ...378.656N. doi:10.1086/170465.
2. Wagoner, Robert V. (2008). «Relativistic and Newtonian diskoseismology». *New Astronomy Reviews*. 51 (10–12):828-834. Bibcode:2008NewAR..51..828W. doi:10.1016/j.newar.2008.03.012.
3. Juhan Frank, Andrew R. King, et al. *Accretion Power in Astrophysics (Cambridge Astrophysics)* | 9 Jul 1992
4. Friedrich Meyer, Wolfgang J. Duschl, Juhan Frank, Emmi Meyer-Hofmeister, *Accretion Disks, Part of the NATO ASI Series book series (ASIC, volume 290)*
5. J Craig Wheeler *Accretion Disks in Compact Stellar Systems* <https://doi.org/10.1142/1916> | December 1993, Pages: 432 (Univ. Texas).
6. Salpeter E.E., 1964, *Accretion of Interstellar Matter by Massive Objects*, *Astrophys. J.*, 140, 796.
7. Shakura N.I., Sunyaev R.A., 1973, *Black holes in binary systems. Observational appearance*, *Astron. Astrophys.*, 24, 337
8. Marek A. Abramowicz and Odele Straub (2014), *Scholarpedia*, 9(8):2408.
9. D.M. Zipoy, *J. Math. Phys.* 7 (1966) 1137; B. Voorhees, *Phys. Rev. D* 2 (1970) 2119.
10. H. Quevedo, *Int. J. Mod. Phys. D* 20, 1779 (2011).
11. K. Boshkayev, E. Gasperin, A.C. Gutierrez-Pineros, H. Quevedo and S. Toktarbay, *Motion of test particles in the field of a naked singularity*, arXiv: gr-qc/1509.03827.
12. D.M. Zipoy, *J. Math. Phys.* 7 (1966) 1137.27
13. B. Voorhees, *Phys. Rev. D* 2 (1970) 2119.
14. L.Herrera and J. L. Hernandez-Pastora, *J. Math. Phys.* 41, 7544 (2000).
15. S. Toktarbay and H. Quevedo, *Grav. & Cosm.* 20, 252 (2014).
16. H. Quevedo, S. Toktarbay, A. Yerlan. arXiv preprint arXiv: 1310.5339, 2013.

**С. Токтарбай<sup>1</sup>, Ә.Ж. Абылаева<sup>2</sup>,  
Г.Н. Худайбергенова<sup>3</sup>, Б.С. Насырова<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup> Казахский национальный университет им. аль-Фараби,  
г. Алматы, Республика Казахстан

## АККРЕЦИОННЫЕ ДИСКИ ВОКРУГ МАССЫ С КВАДРУПОЛЕМ

**Аннотация.** В данной работе рассматривается внешняя статическая осесимметричная гравитация компактных объектов. Исследуются свойства  $q$ -метрики, являющейся простейшим обобщением решения Шварцшильда, содержащего квадрупольный параметр. Из уравнений поля выводится уравнение геодезической линии, и исследуются орбиты исследуемой частицы. Рассматриваются свойства устойчивости тестовых частиц, движущихся по круговым орбитам вокруг массы с квадруполем. Показано, что квадруполь радикально изменяет свойства аккреционного диска, состоящего из таких тестовых частиц.

**Ключевые слова:** квадруполь, компактные объекты, геодезия, аккреционный диск,  $q$  метрика, черная дыра.

**S. Toktarbay<sup>1</sup>, A.Zh. Abylaeva<sup>2</sup>,  
G.N. Khudaibergenova<sup>3</sup>, B.S. Nasyrova<sup>4</sup>**

<sup>1,2,3,4</sup> al-Farabi Kazakh National University,  
Almaty, Republic of Kazakhstan

## ACCRETION DISKS AROUND A MASS WITH QUADRUPOLE

**Annotation.** In this work, we consider the exterior static axisymmetric gravitational of compact objects. We investigate the properties of the  $q$ -metric which is the simplest generalization of the Schwarzschild solution that contains a quadrupole parameter. The geodesic line equation is derived from the field equations and the orbits of the test particle are investigated. We consider the stability properties of test particles moving along circular orbits around a mass with quadrupole. We show that the quadrupole modifies drastically the properties of an accretion disk made of such test particles.

**Keywords:** quadrupole, compact objects, geodesics, accretion disk,  $q$  metric, black hole.