УДК 624.014.624.046 https://doi.org/10.51488/1680-080X/2021.1-28

С.Х. Достанова[1], К. Саналбай[2], К.Е. Токпанова[3], О.Е. Тулегенова[4]

[1,2] Сатпаев Университет, г. Алматы, Республика Казахстан
[3]Туран Университет, г. Алматы, Республика Казахстан
[4]Международная образовательная корпорация (КазГАСА),
г. Алматы, Республика Казахстан

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Аннотация. *Рассматривается устойчивость пологой железобетонной оболочки. Для решения нелинейной задачи используется вариационный метод. Приведены значения верхних и нижних критических нагрузок в зависимости от конструктивных особенностей и размеров оболочки покрытия.*

Ключевые слова: *тонкостенные конструкции, тонкостенные оболочечные конструкций, критическая нагрузка, потеря устойчивости, собственные числа, собственные векторы, деформация, перемещения, оболочки, прогибы гибкой оболочки.*

Тонкостенные оболочечные конструкции обладают высокой прочностью в сравнении с прямолинейными системами, поэтому широко используются в строительстве. Но в силу малой сопротивляемости часто подвергаются потери устойчивости своих равновесных форм [1-5]. Согласно критерию Эйлера, критическая нагрузка системы определяется как наименьшая нагрузка, при которой наряду с исходной формой равновесия оказывается статически возможной смежная бесконечно близкая к ней форма равновесия. С математической точки зрения в этом методе задача определения критического состояния системы заключается в нахождении собственных чисел и соответствующих им векторов линейных дифференциальных уравнений. Собственные числа определяют критические нагрузки, собственные векторы – формы потери устойчивости. Зачастую бывает достаточно определить только первое собственное число и соответствующий ему вектор. Найденная таким образом нагрузка определяет момент разветвления форм равновесия и называется верхней критической нагрузкой.

Резкое падение нагрузки после смены исходной невозмущенной формы равновесия свидетельствует о наличии смежных изгибных форм равновесия при малых уровнях нагрузки и чрезвычайной чувствительности оболочки ко всякого рода возмущениям: начальным прогибам, соблюдению граничных условий, динамическим эффектам окружающей среды и пр. При наличии этих возмущений оболочка скачком переходит от исходной формы равновесия к несмежным изгибным формам. Нагрузка, соответствующая перескоку от исходного состояния к несмежному, является действительной верхней критической нагрузкой. Величина ее определяется видом и мерой возмущений и в основном несовершенствами формы срединной поверхности.

У совершенных оболочек в идеальных условиях нагружения действительная и классическая верхние критические нагрузки совпадают. Решение нелинейных задач заключается в изучении несмежных равновесных форм, т.е. в исследовании закритического поведения оболочки. Обычная процедура исследования задач – построение кривых «нагрузка-прогиб» или «напряжение-деформация» для этих равновесных форм. Нагрузку, соответствующую нижней точке, огибающей кривых, принято называть нижней критической нагрузкой.

Таким образом, нижняя критическая нагрузка определяется уровнем средних напряжений в оболочке, ниже которого не могут существовать другие равновесные формы, кроме исходной. Нижняя критическая нагрузка, найденная в первых решениях, лучше соответствовала эксперименту, чем классическая верхняя критическая нагрузка. В связи с этим появились рекомендации оценивать устойчивость оболочек по нижней критической нагрузке, а вместе с тем и большое количество решений нелинейных задач в указанной постановке.

Для определения нижней критической нагрузки используется нелинейная теория, основанная на нелинейной зависимости между компонентами деформации и перемещениями [2-3]:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} - k_1 w + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial x})^2, \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} - k_2 w + \frac{1}{2}(\frac{\partial w}{\partial y})^2, \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}, \tag{1}$$

где u, v, w – перемещения точек срединной поверхности оболочки в направлении осей x, y, z.; k_1, k_2 – кривизны в двух направлениях, определяемые из уравнения срединной поверхности.

Запишем первую вариацию полной энергии и, используя принцип Лагранжа, приравняем ее нулю, т.е.

$$\begin{gathered}\delta Э = \frac{1}{2}\iiint\limits_V (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy} + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx})dxdydz - \\ - \iint\limits_S (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w)dS - \iiint\limits_V (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dxdydz = 0\end{gathered} \tag{2}$$

*2 и 3 интегралы в (2) представляют работу внешних сил. Используя физические уравнения и фундаментальные балочные функции для перемещений, получаем уравнение относительно критической нагрузк*и [2-4].

Рассматриваются квадратные в плане оболочки покрытия, шарнирно закрепленные по всем краям. Оболочки подкреплены в двух направлениях дискретно расположенными ребрами жесткости. Срединная поверхность оболочки составлена из панелей с кривизной меньше, чем кривизна срединной поверхности собственно оболочки, т.е. из вспарушенных панелей, которые вписываются в круговую поверхность. Оболочка находится под действием нормальной внешней нагрузки интенсивности P_3 $(P_1=P_2=0)$. Используя вариационный метод для решения уравнения (2), получаем значения P_3 в зависимости от значения прогиба в центре оболочки. Критические нагрузки ищутся в пределах изменения отношения прогиба к толщине оболочки от 1 до 15. В дальнейшем рассматриваются симметричные формы потери устойчивости.

Углы перелома определяются по формуле $\theta = \frac{2}{i} arcSin\frac{a\kappa}{2}$, где i –количество переломов, a – размер оболочки в плане, к – кривизна оболочки.

В таблице 1 приведены значения верхних и нижних критических нагрузок и соответствующие им значения прогибов в центре оболочек (q*= $\frac{qa^4}{Eh^4}$, $\xi = \frac{w_0}{h}$, где q – интенсивность нормальной нагрузки, h – толщина оболочки, w_0 – прогиб в центре, E – модуль упругости) в зависимости от количества ребер. Рассматриваются оболочки покрытия, имеющие в плане размеры 3х3м, 18х18м и 24х24м.

Как видно, подкрепление оболочки повышает значения нижних критических нагрузок в сравнении с гладкими оболочками. Значения верхних критических нагрузок незначительно уменьшаются. Потеря устойчивости, т.е. «прощелкивание» сопровождается увеличением прогибов почти в 2 раза независимо от размеров покрытия. Значения критических нагрузок чувствительны к толщине оболочки, это видно из сравнений оболочек 18х18м и 24х24м. Оболочка 18х18м в плане имеет толщину в 1, 3 раза больше, чем 24х24м, поэтому для нее критические нагрузки превышают почти в 2 раза эти значения для оболочки 24х24м. Для прогибов существует обратная зависимость, т.е. прогибы более гибкой оболочки 24х24м с меньшей толщиной больше, нежели у менее гибкой оболочки 18х18м с большей толщиной.

Учет переломов кривизны поверхности покрытия представлен в таблице 2. Из нее видно, что для всех оболочек независимо от их размеров, значения верхних критических нагрузок незначительно уменьшаются с увеличением количества переломов. Нижние критические нагрузки превосходят их значения для гладкой оболочки.

Для длинных оболочек значения нижних критических нагрузок сначала увеличиваются с увеличением количества переломов до определенного их количества, а затем падают, но превосходя значения критической нагрузки для гладкой оболочки. Для таких покрытий характерно, что с увеличением количества переломов нижние критические нагрузки приближаются к значениям для гладких оболочек сверху. Подобная картина наблюдается и для граненой оболочки, которая представляет собой квадратную оболочку переноса положительной кривизны в виде правильного многоугольника идеальной формы, вписанного в круговую поверхность переноса, т.е. панели здесь плоские.

Таблица 1 – Значения нижних и верхних критических нагрузок q* и прогибов в центре оболочек [м] в зависимости от количества ребер.

Размеры оболочки в плане, м	Кол-во ребер	Значения верхних критических нагрузок	Прогибы в центре	Значения нижних критических нагрузок	Прогибы в центре
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
18х18	гладкая	164154	0,038	31881	0,064
18х18	1	162945	0,035	41825	0,063
18х18	2	162920	0,035	43227	0,060

1	2	3	4	5	6
18x18	3	154091	0,034	43546	0,058
18x18	4	151540	0,034	43936	0,055
3x3	гладкая	125350	0,088	21209	0,155
3x3	1	116370	0,075	22340	0,150
3x3	2	104003	0,071	23420	0,145
3x3	3	97935	0,068	24566	0,140
3x3	4	97879	0,067	24621	0,137
24x24	гладкая	63700	0,092	12650	0,195
24x24	1	62580	0,083	13780	0,190
24x24	2	62380	0,080	14210	0,186
24x24	3	62300	0,078	15650	0,182
24x24	4	62220	0,077	16370	0,180

Рассматриваемые в этой работе оболочки имеют размеры, *a=1,3м*, т.е. короткие и изменения наблюдаются при числе граней, начиная с 5. В ней показано также, что для бугристых оболочек с увеличением количества переломов нижние критические нагрузки приближаются к значениям для гладкой оболочки снизу.

Оболочки 18х18м в плане, находящиеся под действием только собственного веса $q=2500кг/м^2$, имеют параметр нагрузки $q^*= 39429$.

Если сравнить q^* со значениями критических нагрузок, представленных в таблицах 1 и 2, то видно, что для гладких оболочек эта величина больше нижней критической нагрузки $q^*=31881$. Это говорит о возможные потери устойчивости равновесной формы. В то же время для подкрепленной ребрами жесткости оболочки или оболочки с переломами кривизны величина q^* меньше нижних критических нагрузок, что соответствует устойчивости напряженно-деформированного состояния.

Сравним деформации оболочки на примере значений прогибов в центре. Для оболочки 18х18м в плане, находящейся только под действием собственного веса, величина $w=3,04x10^{-8}м$, для заглубленной в грунт оболочки на величину $H=3м$ $w=73x10^{-8}м$. При потере устойчивости этих оболочек прогибы в центре резко увеличиваются до значений $w=34x10^{-4}м$.

Таблица 2 – Значения нижних и верхних критических нагрузок q^* и прогибов в центре оболочек м в зависимости от количества переломов

Размеры оболочки в плане, м	Количество переломов	Значения верхних критических нагрузок	Прогибы в центре	Значения нижних критических нагрузок	Прогибы в центре
1	2	3	4	5	6
18x18	гладкая	164154	0,038	31881	0,064
18x18	1	164061	0,036	50874	0,084
18x18	2	164010	0,036	52063	0,072
18x18	3	153913	0,036	52152	0,072
3x3	гладкая	125350	0,088	21209	0,155
3x3	1	125258	0,080	26893	0,160
3x3	2	125208	0,080	28667	0,165

1	2	3	4	5	6
3x3	3	103868	0,070	37575	0,134
3x3	4	97779	0,070	43689	0,124
24x24	гладкая	63700	0,092	12650	0,195
24x24	1	63680	0,091	41620	0,153
24x24	2	63670	0,090	41590	0,150
24x24	3	42090	0,060	34730	0,092
24x24	4	37610	0,060	37610	0,091

Если рассмотреть варианты закрепления оболочки, то они характеризуются следующими данными расчета: критические нагрузки для оболочки с защемлением вдоль одного края возрастают на 7,5%, а для защемления двух краев на 10%.

Рассмотрены случаи образования одиночных эллиптических вмятин между центральными ребрами. В таблице 3 приведены значения критической нагрузки, размеров вмятины и прогибов в центре при различных соотношениях кривизны. Введены следующие обозначения:

$$q^o = \frac{qR_2^2}{Eh^2}\ ;\ g = \frac{c^2}{R_2 h}\ ;\ \lambda = R_2 / R_1,$$

где l_1, l_2 – размеры оболочки в плане, $c=a/l_1=b/l_2$, a,b – полуоси эллипса,

R_1, R_2 – главные радиусы кривизны оболочки, h – толщина, E – модуль упругости материала оболочки, q^0 – интенсивность нормальной нагрузки.

Из таблицы 3 видно, что с увеличением значений λ критические нагрузки возрастают, при этом уменьшаются размеры вмятины и прогибы в центре.

Таблица 3 – Значения критической нагрузки, размеров вмятины и прогибов в центре при различных соотношениях кривизн

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
q^o	0,500	0,552	0,675	0,745	0,801	0,846	0,882	0,911	0,935	0,956
g	5,98	3,44	2,61	2,7	2,77	2,82	2,86	2,9	2,92	2,93
W_o	5,27	5,10	4,28	4,,38	4,43	4,46	4,48	4,49	4,50	4,51

Образование одиночных вмятин между центральными ребрами уменьшают значения критических нагрузок примерно на 5-10%.

Приведенные результаты расчета говорят о необходимости рассмотрения устойчивости для оболочек покрытий с разрывными параметрами, как при исследовании прочности, так и жесткости тонкостенных покрытий.

Литература:

1. *Леденев В.В. Оболочечные конструкции в строительстве: учебн. пособие. – Тамбов: ФГБОУ, «ТГТУ», 2016. – 272 с.*
2. *Александров А.В., Лащенников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы. – М., 1983.– 488 с.*

3. *Александров А.В., Потапов В.Д., Зылёв В.Б. Строительная механика: учеб. для вузов. Часть 1. – М.: Высшая школа, 2007. – 703 с.*
4. *Достанова С.Х., Касымова Г.Т. Исследование устойчивости пологих оболочек / Сб. тр. Республ. науч.-техн. конф. «Архитектура и строительство: состояние и перспективы развития». – Астана: ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, 2012.*
5. *Грачев В.А., Найштута Ю.С. Задачи устойчивости тонких упругих оболочек. //Компьютерные исследования и моделирование. – 2018. – Т. 10. – № 6. – С. 775-787.*

References:

1. *Ledenev V.V. Shell structures in construction. Training allowance. – Tambov: FGBOU, «TSTU», 2016. – 272 p.*
2. *Alexandrov A.V., Laschennikov B.Ya., Shaposhnikov N.N. Structural mechanics. Thin-walled spatial systems. – Moscow, 1983. – 488 p.*
3. *Aleksandrov AV, Potapov VD, Zylev VB Structural mechanics: Textbook for universities. Part 1. – M.: Higher School, 2007. – 703 p.*
4. *Dostanova S.Kh., Kasymova G.T. Investigation of the stability of shallow shells. Sat. works of the Republican scientific and technical / Proceedings of the Republican Scientific and Technical Conference «Architecture and Construction: state and prospects of development». – Astana: ENU them. L. Gumilyov, 2012.*
5. *Grachev VA, Naishtuta Yu. S. Problems of stability of thin elastic shells. // Computer Research and Modeling. – 2018. – V. 10. – No. 6. – P. 775-787.*

С.Х. Достанова[1], К. Саналбай[2], К.Е. Токпанова[3], О.Е. Тулегенова[4]
[1,2] Сәтбаев университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы
[3]Туран университеті, Алматы қ., Қазақстан Республикасы
[4]Халықаралық білім беру корпорациясы (ҚазБСҚА кампусы),
Алматы қ., Қазақстан Республикасы

ЖҰҚА ҚАБЫРҒАЛЫ ҚҰРЫЛЫМДАРДЫҢ ТҰРАҚТЫЛЫҒЫН ЖОҒАЛТУ

Аңдатпа. *Тегіс темірбетон қабықшасының орнықтылығы қарастырылады. Сызықтық емес есепті шешу үшін вариациялық әдіс қолданылады. Жоғарғы және төменгі аумалы жүктемелердің мәндері жабын қабықшасының құрылымдық ерекшеліктері мен өлшемдеріне байланысты келтірілген.*

Түйін сөздер: *жұқа қабырғалы құрылымдар, жұқа қабырғалы қабықшалы құрылымдар, аумалы жүктеме, орнықтылықты жоғалту, меншікті мәндер, меншікті векторлар, деформация, орын ауыстырулар, қабықшалар, иілгіш қабықшаның иілулері.*

S.Kh. Dostanova[1], K. Sanalbay[2], K.E. Tokpanova[3], O.E. Tulegenova[4]
[1,4]Satpayev University, Almaty, Republic of Kazakhstan
[2]International Educational Corporation (KAZGASA campus),
Almaty, Republic of Kazakhstan
[3]Turan University, Almaty, Republic of Kazakhstan

LOSS OF STABILITY OF THIN-WALLED STRUCTURES

Annotation. *The stability of a flat reinforced concrete shell is considered. A variational method is used to solve a nonlinear problem. The values of the upper and lower critical loads are given depending on the design features and dimensions of the coating shell.*

Keywords: *Thin-walled structures, thin-walled shell structures, critical load, buckling, eigenvalues, eigenvectors, deformation, displacements, shells, deflections of a flexible shell.*